

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – La suite $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}$

(u_{2n+1}) tend vers 0 et (u_{2n}) vers $+\infty$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Étude de f .

- a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} < 0$. $f(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		–
f	$+\infty$	0

- b) Par récurrence : $u_0 = 1 > 0$, et si $u_n > 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini et strictement positif.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est défini et } u_n > 0.$$

2. Les scripts.

Le script de gauche s'arrête au premier n tel que $u_n \leq 10^{-5}$, celui de droite au premier n tel que $u_n \geq 10^5$.

$$u_5 \leq 10^{-5} \quad \text{et} \quad u_6 \geq 10^5.$$

On conjecture que (u_{2n+1}) tend vers 0 et que (u_{2n}) tend vers $+\infty$: la suite (u_n) diverge.

3. Le point fixe α .

- a) $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$; $g(0) = 1$ et $g(x) \rightarrow -\infty$ en $+\infty$.

$$g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ de } 1 \text{ à } -\infty.$$

- b) Pour $x > 0$, $f(x) = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0$. g est continue et strictement décroissante, réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $] -\infty, 1]$, et $g(0) = 1 \neq 0$.

$$f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- c) $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - e^{-2} > 0$ (car $\frac{1}{e} < 2$) et $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$; g étant strictement décroissante :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

4. Sous-suites.

- a) $u_1 = e^{-1}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = e \cdot e^{-1/e} = e^{1-1/e} > 1 = u_0$. Comme f est strictement décroissante, $u_3 = f(u_2) < f(u_0) = u_1$.

$$u_2 > u_0 \quad \text{et} \quad u_3 < u_1.$$

- b) $f \circ f$ est strictement croissante (composée de deux fonctions strictement décroissantes) et $u_{n+2} = (f \circ f)(u_n)$. Par récurrence, $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.

$$(u_{2n}) \text{ est croissante et } (u_{2n+1}) \text{ est décroissante.}$$

5. La fonction h .

- a) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ et

$$h(x) = \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} = x e^x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{e^{-x}}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right) \rightarrow 0$ et $x e^x \rightarrow 0$: $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$.

$$h \text{ est continue en } 0.$$

- b) $h(0) = 0$. Pour $x > 0$, $h(x) = x \iff e^x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 \iff x = \frac{e^{-x}}{x} \iff x^2 = e^{-x} \iff x = \alpha$.

$$h(x) = x \iff x \in \{0, \alpha\}.$$

- c) (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $\ell \geq 0$ (limite monotone). h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$, donc $h(\ell) = \ell$ et $\ell \in \{0, \alpha\}$. Or $\ell \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0.$$

- d) Si (u_{2n}) convergerait vers ℓ' , on aurait $\ell' \geq u_0 = 1$ (croissance) et $h(\ell') = \ell'$, donc $\ell' \in \{0, \alpha\} \subset [0, 1[$: absurde. La suite (u_{2n}) diverge ; étant croissante, elle tend vers $+\infty$ (théorème de la limite monotone).

$$(u_{2n}) \text{ diverge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

Exercice 2

Exercice 2 – Supplémentarité de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$

Polynôme annulateur P avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Cas $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$.

a)

$$(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f) = f^2 - 2f + \text{Id} + 2f - f^2, \quad \boxed{(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f) = \text{Id}.}$$

b) En appliquant a) à x :

$$\boxed{x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x).}$$

c) $(f - \text{Id})^2(x) \in \text{Ker } f$ car $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$, et $f((2\text{Id} - f)(x)) \in \text{Im } f : \mathbb{R}^n = \text{Ker } f + \text{Im } f$. Si $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, $x = f(y) : (f - \text{Id})^2(x) = f \circ (f - \text{Id})^2(y) = 0$ (les polynômes en f commutent) et $(2\text{Id} - f) \circ f(x) = 0$; par b), $x = 0$.

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.}$$

2. Cas $f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = 0$.

a) $XP = 1 - \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{4}X :$

$$\boxed{P = \frac{5 - X}{4}.}$$

b) Alors $\text{Id} = \frac{1}{4}(f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) + f \circ P(f)$, et pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \frac{1}{4}(f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})(x) + f(P(f)(x))$: le premier terme est dans $\text{Ker } f$ (hypothèse), le second dans $\text{Im } f$. Si $x = f(y) \in \text{Ker } f$, le premier terme vaut $\frac{1}{4}f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})(y) = 0$ et le second $P(f)(f(x)) = 0$, donc $x = 0$.

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.}$$

3. Cas général.

a) P est de degré p , de coefficient constant $P(0) = 0$, et son coefficient de X vaut $P'(0) = a_1 \neq 0$.

$$\boxed{P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p, \quad a_1 \neq 0.}$$

b) Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, $x = f(y)$. Pour $k \geq 2$, $f^k(y) = f^{k-1}(x) = 0$. Donc $0 = P(f)(y) = a_1f(y) = a_1x$ et $x = 0$. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$, et la somme étant directe, elle vaut $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.}$$

c) $X(X-1)^2 = X - 2X^2 + X^3$ et $X(X-1)(X-4) = 4X - 5X^2 + X^3$ sont annulateurs dans les questions 1 et 2, s'annulent en 0 et ont une dérivée en 0 égale à 1 et 4.

Les questions 1 et 2 sont des cas particuliers de la question 3.

Exercice 3

Exercice 3 – Maximum de vraisemblance pour une loi normale

$\hat{\theta}_1 = \bar{x}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$; Z_n est un estimateur convergent de σ^2 .

Corrigé – Exercice 3.

Notons $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$.

1. Vraisemblance.

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2\right),$$

$$\ln L(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \theta_2 - \frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2.$$

2. Point critique.

- a) f est somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U : une constante, $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln \theta_2$ ($\theta_2 > 0$) et le produit de la fonction polynomiale $\sum (x_i - \theta_1)^2$ par $\frac{1}{\theta_2}$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

- b) $\partial_1 f = \frac{1}{\theta_2} \sum_i (x_i - \theta_1) = \frac{n}{\theta_2} (\bar{x} - \theta_1)$ et $\partial_2 f = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_i (x_i - \theta_1)^2$. Le gradient est nul si et seulement si $\theta_1 = \bar{x}$ et $\theta_2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2$, réel strictement positif car les x_i ne sont pas tous égaux.

$$A = \left(\bar{x}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2\right) \text{ est l'unique point critique de } f.$$

- c) $\partial_{1,1}^2 f = -\frac{n}{\theta_2^2}$, $\partial_{1,2}^2 f = -\frac{n}{\theta_2^2} (\bar{x} - \theta_1)$, $\partial_{2,2}^2 f = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^3} \sum_i (x_i - \theta_1)^2$. En A , $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = n\hat{\theta}_2$:

$$\partial_{1,1}^2 f(A) = -\frac{n}{\hat{\theta}_2^2}, \quad \partial_{1,2}^2 f(A) = 0, \quad \partial_{2,2}^2 f(A) = \frac{n}{2\hat{\theta}_2^2} - \frac{n}{\hat{\theta}_2^2} = -\frac{n}{2\hat{\theta}_2^2}.$$

- d) La hessienne en A est diagonale, de valeurs propres $-\frac{n}{\hat{\theta}_2^2}$ et $-\frac{n}{2\hat{\theta}_2^2}$, strictement négatives, et A est un point critique de f sur l'ouvert U :

f admet un maximum local en A .

- e) $L = \exp \circ f$ et $\exp$ est strictement croissante : $f \leq f(A)$ au voisinage de A entraîne $L \leq L(A)$.

L admet aussi un maximum local en A .

3. Biais de $\overline{X_n}$.

Par linéarité, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum \mathbb{E}(X_i) = m$.

$\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m .

4. Biais de Z_n .

$\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 + m^2$ et $\mathbb{E}(\overline{X_n^2}) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) + m^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$ (indépendance). Donc

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sigma^2 + m^2 - \frac{\sigma^2}{n} - m^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma^2,$$

Z_n est asymptotiquement sans biais.

5. Convergence de Z_n .

- a) Les X_i sont indépendantes, de même loi, admettent une variance : par la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m$. Par composition par la fonction continue $x \mapsto x^2$:

$$\overline{X_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} m^2.$$

- b) $x^4 \varphi_{m,\sigma^2}(x) = o(\frac{1}{x^2})$ en $\pm\infty$ (croissances comparées) : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi_{m,\sigma^2}(x) dx$ converge. Ainsi les X_i^2 , indépendantes et de même loi (lemme des coalitions), admettent une variance et une espérance $\sigma^2 + m^2$; par la loi faible des grands nombres :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 + m^2.$$

- c) $Z_n - \sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \sum X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right) - (\overline{X_n^2} - m^2)$. Si les deux valeurs absolues étaient $< \frac{\varepsilon}{2}$, l'inégalité triangulaire donnerait $|Z_n - \sigma^2| < \varepsilon$. Par contraposée :

$$(|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \subset \left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|\overline{X_n^2} - m^2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

- d) Par c), $\mathbb{P}(|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon)$ est majorée par la somme des probabilités des deux événements, qui tendent vers 0 (a et b).

$$Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2 : Z_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma^2.$$

Problème

Problème – Parties I et II – Préliminaires et matrice de transition

$$L_{n+1} = L_n M ; \operatorname{Sp}(M) = \{1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}.$$

Corrigé – Problème.

1. Limite d'un produit.

Le coefficient (i, j) de BA_n est $\sum_{k=1}^4 b_{i,k} a_{k,j}(n)$, somme finie de suites convergentes, de limite $\sum_k b_{i,k} a_{k,j}$, coefficient (i, j) de BA .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} BA_n = BA.$$

2. Sommes de lignes constantes.

Avec $X_0 = {}^t(1, 1, 1, 1) \neq 0$, la i -ième coordonnée de AX_0 est $\sum_j a_{i,j} = c : AX_0 = cX_0$.

$$c \text{ est valeur propre de } A.$$

3. Trace.

$A = PDP^{-1}$ avec D diagonale ; $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PDP^{-1}) = \operatorname{tr}(DP^{-1}P) = \operatorname{tr}(D)$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A , chaque valeur propre λ apparaissant $\dim E_\lambda(D) = \dim E_\lambda(A)$ fois.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda} \lambda \dim E_{\lambda}(A).$$

4. Probabilités de transition.

Pour $n \geq 3$, chaque événement $[X_n = i]$ est de probabilité non nulle. Sachant $[X_n = i]$, U contient i blanches et $3 - i$ noires, V contient $3 - i$ blanches et i noires. Le nombre de blanches de U augmente de 1 si l'on tire une noire de U et une blanche de V , diminue de 1 si l'on tire une blanche de U et une noire de V , et reste inchangé sinon. Par indépendance des deux tirages :

$$\begin{aligned} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i+1) &= \frac{(3-i)^2}{9}, & P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i-1) &= \frac{i^2}{9}, \\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) &= \frac{2i(3-i)}{9}, \end{aligned}$$

et 0 pour les autres valeurs de j .

5. La matrice M .

a) D'après 4, ligne par ligne ($i = 0, 1, 2, 3$) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est la matrice du script de la question 12.

b) Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = i])_{0 \leq i \leq 3}$:

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^3 P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j), \quad \boxed{L_{n+1} = L_n M \quad (n \geq 3)}.$$

c) Par récurrence ($L_{n+1} = L_n M$ pour tout n , avec les cas admis) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 M^n.}$$

6. Valeurs propres de M .

a) Chaque ligne de M a pour somme 1 (somme de probabilités conditionnelles) ; par 2 :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M.}$$

b) $M {}^t E_1 = {}^t(-1, 1 - \frac{8}{9}, -\frac{8}{9} + 1, -1) = {}^t(-1, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -1) = -\frac{1}{9} {}^t E_1$ et $M {}^t E_2 = {}^t(1, \frac{3}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}, \frac{4}{9} - \frac{4}{9} - \frac{3}{9}, -1) = \frac{1}{3} {}^t E_2$.

$$\boxed{{}^t E_1 \text{ est propre pour } -\frac{1}{9}, \quad {}^t E_2 \text{ est propre pour } \frac{1}{3}.}$$

c) Si M est diagonalisable, par 3, la somme de ses valeurs propres comptées avec la dimension des sous-espaces propres (de somme 4) vaut $\text{tr}(M) = \frac{8}{9}$. On connaît trois valeurs propres distinctes $1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}$, de somme $\frac{11}{9}$; le quatrième terme λ vérifie $\frac{11}{9} + \lambda = \frac{8}{9}$, soit $\lambda = -\frac{1}{3}$, qui est bien différent des trois autres. Vérification avec $E_3 = (3, -1, 1, -3)$: $M {}^t E_3 = {}^t(-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = -\frac{1}{3} {}^t E_3$. M possède alors 4 valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{3} \text{ et } M \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(M) = \left\{1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}.}$$

Problème – Partie III – Recherche d'une loi limite

$\lim M^n$ a toutes ses lignes égales à $(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20})$.

Corrigé – Problème.

7. Diagonalisation.

Les vecteurs ${}^t(1, 1, 1, 1)$, ${}^t E_1$, ${}^t E_2$, ${}^t E_3$ sont propres pour les valeurs propres distinctes $1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$: ils forment une base.

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}\left(1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad M = Q D Q^{-1}.$$

8. Limite de M^n .

$M^n = Q D^n Q^{-1}$ et $D^n = \text{diag}(1, (-\frac{1}{9})^n, (\frac{1}{3})^n, (-\frac{1}{3})^n) \rightarrow \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Par la question

1 (et le résultat admis pour BA_nC) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = Q \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0) Q^{-1}.$$

9. Première ligne de Q^{-1} .

- a) La première ligne de $Q^{-1}M = DQ^{-1}$ donne $LM = L$, soit $\frac{\ell_2}{9} = \ell_1$, $\ell_1 + \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 = \ell_2$, $\frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 + \ell_4 = \ell_3$, $\frac{\ell_3}{9} = \ell_4$. Ainsi $\ell_2 = 9\ell_1$, $\ell_3 = 9\ell_4$, puis la deuxième équation donne $\ell_1 + 4\ell_1 + 4\ell_4 = 9\ell_1$, soit $\ell_1 = \ell_4$.

$$\ell_1 = \ell_4, \quad \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4.$$

- b) Le coefficient $(1, 1)$ de $Q^{-1}Q = I_4$ est $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 20\ell_4 = 1$.

$$\ell_4 = \frac{1}{20}.$$

10. Coefficients de la limite.

$Q \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0) Q^{-1}$ est le produit de la première colonne de Q (que des 1) par la première ligne L de Q^{-1} : toutes ses lignes sont égales à L .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Interprétation.

- a) Les tirages ordonnés sans remise de 3 boules parmi 6 sont équiprobables ; le nombre de tirages amenant k blanches est $\binom{3}{k} \binom{3}{3-k} \cdot 3!$ sur $6 \cdot 5 \cdot 4 = \binom{6}{3} \cdot 3!$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}},$$

$$P(X = 0) = P(X = 3) = \frac{1}{20}, \quad P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{9}{20}.$$

- b) Le vecteur colonne V des $P(X = k)$ est ${}^tL$ et $LM = L$ (9.a), donc ${}^tMV = {}^t(LM) = V$, avec $V \neq 0$.

$$V \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à } 1.$$

- c) $L_n = L_0 M^n$ avec $L_0 = (0, 0, 0, 1)$; par 1 et 10, $L_n \rightarrow (0, 0, 0, 1) \lim M^n = (\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20})$. Ainsi $P(X_n = k) \rightarrow P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$; les variables étant à valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, $F_{X_n}(x) = \sum_{k \leq x} P(X_n = k) \rightarrow F_X(x)$ pour tout réel x .

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

12. Simulation.

Le script simule $X_1, \dots, X_n$ (l'état suivant est tiré selon la ligne de M correspondant à l'état courant, par inversion de la fonction de répartition) et $\mathbf{f}$ est la proportion des $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $X_k = 0$. Son espérance $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k = 0)$ est une moyenne de termes qui tendent vers $\frac{1}{20}$ (11.c), donc elle tend vers $\frac{1}{20}$.

Pour n grand, $\mathbf{f}$ est proche de $\frac{1}{20} = 0,05$.