

**Année :** 2016

**École :** EDHEC

**Option :** Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

## Sommaire

|                                                                                                                                              |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Exercice 1 :</b> <i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; Python</i>                                                       | <b>1</b> |
| <b>Exercice 2 :</b> <i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction</i>                                          | <b>1</b> |
| <b>Exercice 3 :</b> <i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; variables à densité ; convergences de variables ; estimations</i> | <b>2</b> |
| <b>Problème :</b> <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; convergences de variables ; réduction ; Python</i>                             | <b>4</b> |

## Exercice 1

*Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; Python*

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

- 1)
  - a) Dresser le tableau de variation de  $f$ , limites comprises.
  - b) Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est parfaitement défini et strictement positif.
- 2) Les scripts Python suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et, pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de  $u_5$  et  $u_6$  ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

```
from math import exp
```

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

```
from math import exp
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100000:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

- 3)
  - a) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^{-x} - x^2.$$

- b) En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, que l'on notera  $\alpha$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - c) Montrer que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .
- 4)
  - a) Établir les deux inégalités :  $u_2 > u_0$  et  $u_3 < u_1$ .
  - b) En déduire les variations des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 5) On pose

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a) Déterminer  $h(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif et vérifier que  $h$  est continue en 0.
  - b) Résoudre l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$  élément de  $\mathbb{R}_+$ .
  - c) En déduire la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - d) Montrer par l'absurde que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge puis donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ .

## Exercice 2

*Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction*

1) Dans cette question,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  qui vérifie  $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$ , où  $\text{Id}$  désigne l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^n$ .

a) Déterminer  $(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f)$ .

b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x).$$

c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que  $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

2) Dans cette question,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = 0.$$

a) Déterminer un polynôme  $P$  du premier degré vérifiant

$$\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1.$$

b) En déduire que  $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

3) Dans cette question,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$ , dont le degré est égal à  $p$  (avec  $p \geq 2$ ), et tel que  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ .

a) Montrer qu'il existe  $p$  réels  $a_1, \dots, a_p$ , avec  $a_1 \neq 0$ , tels que  $P = a_1X + \dots + a_pX^p$ .

b) En déduire que  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , puis établir que  $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

## Exercice 3

*Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; variables à densité ; convergences de variables ; estimations*

Les questions 1) et 2) sont indépendantes des suivantes.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$  (avec  $\sigma > 0$ ). On rappelle qu'une densité de  $X$  est la fonction  $\varphi_{m,\sigma^2}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres  $\theta_1 = m$  et  $\theta_2 = \sigma^2$  et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de la loi de  $X$ , avec  $n \geq 2$ . On rappelle que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et suivent toutes la même loi que  $X$ .

On appelle vraisemblance du couple  $(\theta_1, \theta_2)$  la fonction notée  $L$  définie par

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\theta_1, \theta_2}(x_i), \quad \text{où } x_1, \dots, x_n \text{ sont des nombres réels donnés.}$$

- 1) Donner l'expression de  $L(\theta_1, \theta_2)$ , puis celle de  $\ln(L(\theta_1, \theta_2))$  en fonction de  $\theta_1, \theta_2$  et  $x_1, \dots, x_n$ .
- 2) a) Justifier que la fonction  $f : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln(L(\theta_1, \theta_2))$ , définie sur l'ouvert  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , est de classe  $C^2$  sur  $U$ .

b) Montrer que  $f$  admet un seul point critique  $A = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  sur  $U$  tel que

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\theta}_1^2.$$

c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  en  $A$ . On vérifiera en particulier que

$$\partial_{2,2}^2(f)(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{-n}{2\hat{\theta}_2^2}.$$

d) En déduire que  $f$  admet un maximum local en  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ .

e) Expliquer pourquoi la fonction  $L$  admet aussi un maximum local en  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ .

On pose dorénavant

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2.$$

- 3) Vérifier que  $\overline{X}_n$  est un estimateur sans biais de  $m$ .
- 4) Montrer que  $Z_n$  est un estimateur asymptotiquement sans biais de  $\sigma^2$ .
- 5) On se propose, dans cette question, de montrer que  $Z_n$  est un estimateur convergent de  $\sigma^2$ .
- a) Rappeler pourquoi la suite  $(\overline{X}_n)$  converge en probabilité vers  $m$ . Qu'en déduire pour la suite  $(\overline{X}_n^2)$  ? Justifier.
- b) Montrer que  $X$  possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$$

converge en probabilité vers  $\sigma^2 + m^2$ .

c) Établir que, pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, on a

$$\begin{aligned} (|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) &\subset \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\cup \left( \left| \overline{X}_n^2 - m^2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

d) Déduire des questions précédentes que  $Z_n$  est un estimateur convergent de  $\sigma^2$ .

## Problème

*Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; convergences de variables ; réduction ; Python*

### Partie I — Résultats préliminaires

- 1) Pour chaque entier naturel  $n$ , on considère une matrice  $A_n$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , dont l'élément situé à l'intersection de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne est noté  $a_{i,j}(n)$ , ainsi qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , dont l'élément situé à l'intersection de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne est  $a_{i,j}$ .

On suppose que la suite de matrices  $(A_n)$  converge vers la matrice  $A$ , c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}.$$

Soient  $B$  et  $C$  deux autres matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , indépendantes de  $n$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} BA_n = BA$ . On admet que ceci reste vrai si  $B$  appartient à  $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ .

On admet que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n C = AC$  et que ceci reste vrai si  $C$  appartient à  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .

On admet également que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} BA_n C = BAC$ .

- 2) Montrer que, si une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  est telle que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^4 a_{i,j}$  est une constante  $c$ , alors  $c$  est une valeur propre de  $A$ .
- 3) Montrer que, si une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé, est égale à la trace de  $A$ .

### Partie II — Étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes  $U$  et  $V$  contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne  $U$  contient 3 boules blanches et l'urne  $V$  contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient  $U$  avant le  $(n+1)$ -ième tirage (c'est-à-dire après le  $n$ -ième échange) et on a donc  $X_0 = 3$ .

On considère le vecteur ligne

$$L_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3)).$$

- 4) Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\llbracket 0, 3 \rrbracket$  et tout entier  $n \geq 3$ , déterminer  $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ .
- 5) a) Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 3 et  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  dont l'élément de la  $(i+1)$ -ième ligne et de la  $(j+1)$ -ième colonne est égal à  $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ . Justifier soigneusement que  $M$  est la matrice donnée à la question 12).

**b)** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3, \quad L_{n+1} = L_n M$$

(le résultat est admis pour  $n = 0, 1$  et  $2$ ).

**c)** En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 M^n.$$

**6) a)** Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de  $M$ .

**b)** On considère les vecteurs  $E_1 = (9 \ -1 \ -1 \ 9)$  et  $E_2 = (3 \ 1 \ -1 \ -3)$ . Montrer que  ${}^t E_1$  et  ${}^t E_2$  sont vecteurs propres de  $M$  et donner les valeurs propres associées.

**c)** Montrer que, si  $M$  est diagonalisable, alors  $M$  possède une quatrième valeur propre  $\lambda$  que l'on déterminera. Vérifier que  $\lambda$  est effectivement valeur propre de  $M$  et conclure que  $M$  est diagonalisable.

### Partie III — Recherche d'une loi stationnaire

**7)** Justifier qu'il existe une matrice  $Q$  inversible, dont la première colonne ne contient que des 1, et une matrice  $D$  diagonale telle que  $M = QDQ^{-1}$ .

**8)** Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

**9)** Soit  $L = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  la première ligne de  $Q^{-1}$ .

**a)** En utilisant la relation  $Q^{-1}M = DQ^{-1}$ , montrer que  $\ell_1 = \ell_4$  et  $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$ .

**b)** Conclure, en considérant le produit  $Q^{-1}Q$ , que  $\ell_4 = \frac{1}{20}$ .

**10)** Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$ .

**11)** On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.

On note  $B_k$  (respectivement  $N_k$ ) l'événement « obtenir une boule blanche (respectivement noire) au  $k$ -ième tirage » et  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

**a)** Quelle est la loi de  $X$  ?

**b)** Vérifier que

$$\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de  ${}^t M$ , associé à la valeur propre 1.

c) Montrer que la suite  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ .

- 12) On rappelle que la fonction `choice` du sous-module `numpy.random` permet de simuler l'état suivant d'une chaîne de Markov à partir des probabilités de transition. On considère le script Python suivant :

```
import numpy as np

n = int(input("Entrer la valeur de n : "))
M = np.array([[0, 1, 0, 0],
              [1/9, 4/9, 4/9, 0],
              [0, 4/9, 4/9, 1/9],
              [0, 0, 1, 0]])

X = np.empty(n, dtype=int)
etat = 3
for k in range(n):
    etat = np.random.choice(4, p=M[etat])
    X[k] = etat

f = np.sum(X == 0) / n
print(f)
```

De quelle valeur exacte le contenu de `f` est-il proche lorsque  $n$  est assez grand ?