

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Partie I – Un exemple

$A = 4P_1 + 9P_2$ avec P_1, P_2 projecteurs ; racine carrée de A .

Corrigé – Problème 1.

1. Les matrices P_1 et P_2 .

Le système donne $5P_2 = A - 4I_3$ et $P_1 = I_3 - P_2$:

$$P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{5}(9I_3 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Puissances de A .

a) Par le calcul, $P_1^2 = P_1$ et $P_2^2 = P_2$; puis $P_1P_2 = P_1(I_3 - P_1) = P_1 - P_1^2 = 0$ et de même $P_2P_1 = 0$.

$$P_1^2 = P_1, \quad P_1P_2 = P_2P_1 = 0, \quad P_2^2 = P_2.$$

b) Récurrence : $A^0 = I_3 = P_1 + P_2$. Si $A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2$, alors $A^{k+1} = (4^kP_1 + 9^kP_2)(4P_1 + 9P_2) = 4^{k+1}P_1 + 9^{k+1}P_2$ d'après a).

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2.$$

3. Racine carrée.

Avec $B = 2P_1 + 3P_2$, a) donne $B^2 = 4P_1 + 9P_2 = A$.

$$B = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = A.$$

4. Valeurs propres.

A est triangulaire :

$$\text{Sp}(A) = \{4, 9\}.$$

Problème 1 – Parties II et III – Décomposition spectrale de f

$f^k = \sum \lambda_i^k p_i$; $p_i = L_i(f)$ projecteurs sur les sous-espaces propres.

Corrigé – Problème 1.**5. Polynômes de degré $\leq m$.**

Si $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, $P(f) = \sum_k a_k f^k = \sum_k a_k \sum_i \lambda_i^k p_i = \sum_i \left(\sum_k a_k \lambda_i^k \right) p_i$:

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

6. Polynôme annulateur.

$N \in \mathbb{R}_m[X]$ et $N(\lambda_i) = 0$ pour tout i :

$$N(f) = \tilde{0}.$$

7. Les polynômes L_i .

a) Pour $j \neq i$, $M_i(\lambda_j)$ contient le facteur $\lambda_j - \lambda_j = 0$; et $L_i(\lambda_i) = \frac{M_i(\lambda_i)}{M_i(\lambda_i)} = 1$ ($M_i(\lambda_i) \neq 0$, les λ_ℓ étant distincts).

$$L_i(\lambda_j) = 1 \text{ si } i = j, \quad L_i(\lambda_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

b) $L_i \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \subset \mathbb{R}_m[X]$; par 5 et a) :

$$L_i(f) = p_i.$$

8. Somme des p_i .

a) C'est l'hypothèse avec $k = 0$:

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^m p_i.$$

b) Pour $x \in E$, $x = \sum_i p_i(x) \in \sum_i \text{Im}(p_i)$.

$$E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i).$$

9. Images des p_i .

a) $N = (X - \lambda_i)M_i = (X - \lambda_i)M_i(\lambda_i)L_i$:

$$N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i.$$

b) Par le résultat admis et 6, $\tilde{0} = N(f) = M_i(\lambda_i)(f - \lambda_i e) \circ L_i(f) = M_i(\lambda_i)(f - \lambda_i e) \circ p_i$, avec $M_i(\lambda_i) \neq 0$.

$$\text{Im}(p_i) \subset \text{Ker}(f - \lambda_i e).$$

10. Diagonalisabilité.

$p_i \neq \tilde{0}$, donc $\text{Im}(p_i) \neq \{0\}$ et λ_i est valeur propre de f . N est annulateur de f (6), donc les valeurs propres de f sont parmi les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de N . Les sous-espaces propres sont en somme directe et, par 8.b) et 9.b), $E = \sum \text{Im}(p_i) \subset \bigoplus_i E_{\lambda_i}(f) : f$ est diagonalisable. Enfin $\dim E \leq \sum \dim \text{Im}(p_i) \leq \sum \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E$, d'où $\dim \text{Im}(p_i) = \dim E_{\lambda_i}(f)$ et l'égalité.

$$f \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad E_{\lambda_i}(f) = \text{Im}(p_i).$$

11. Relations entre les p_i .

a) Pour $i \neq j$, $L_i L_j$ contient tous les facteurs $X - \lambda_\ell$, donc $L_i L_j = c N R$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$; par 7.b) et le résultat admis, $p_i \circ p_j = (L_i L_j)(f) = c R(f) \circ N(f)$.

$$p_i \circ p_j = \tilde{0} \quad (i \neq j).$$

b) $p_i = p_i \circ e = \sum_j p_i \circ p_j = p_i \circ p_i$ (8.a et a).

$$p_i \circ p_i = p_i.$$

c) Avec $k = 1$, $f = \sum_j \lambda_j p_j$, donc $p_i \circ f = \sum_j \lambda_j p_i \circ p_j = \lambda_i p_i$.

$$p_i \circ f = \lambda_i p_i.$$

12. Toutes les puissances.

Par récurrence : vrai pour $k = 0$; si $f^k = \sum_i \lambda_i^k p_i$, alors $f^{k+1} = \sum_i \lambda_i^k p_i \circ f = \sum_i \lambda_i^{k+1} p_i$ (11.c). Puis, par linéarité, comme en 5 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

13. Le produit scalaire φ .

φ est symétrique et bilinéaire (linéarité des p_i et bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$). $\varphi(x, x) = \sum_i \|p_i(x)\|^2 \geq 0$, et si $\varphi(x, x) = 0$, tous les $p_i(x)$ sont nuls, donc $x = \sum_i p_i(x) = 0$.

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

14. Symétrie de f .

D'après 11.c), $\varphi(f(x), y) = \sum_i \langle \lambda_i p_i(x), p_i(y) \rangle = \sum_i \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y) \rangle$, expression symétrique en (x, y) , donc égale à $\varphi(x, f(y))$.

$$f \text{ est symétrique pour } \varphi.$$

Par le théorème spectral, on retrouve que f est diagonalisable (question 10).

15. Projecteurs orthogonaux.

p_i est un projecteur (11.b) d'image $\text{Im}(p_i)$. Pour $x, y \in E$, par 11.a) et 11.b),

$$\varphi(p_i(x), y - p_i(y)) = \sum_j \langle p_j \circ p_i(x), p_j(y) - p_j \circ p_i(y) \rangle = \langle p_i(x), p_i(y) - p_i(y) \rangle = 0.$$

Ainsi $y - p_i(y)$ est φ -orthogonal à $\text{Im}(p_i)$ pour tout y .

$$p_i \text{ est le projecteur } \varphi\text{-orthogonal sur } \text{Im}(p_i).$$

Problème 2

Problème 2 – Partie I – La fonction $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

$$S(1) = \ln 2, S(2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Corrigé – Problème 2.

1. Divergence pour $x \leq 0$.

Si $x \leq 0$, $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right| = n^{-x} \geq 1$: le terme général ne tend pas vers 0.

La série diverge grossièrement pour $x \in \mathbb{R}^-$.

2. Le cas $x > 0$.

a) $u_{2p+2} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \geq 0$, $u_{2p+1} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \leq 0$ et $u_{2p-1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p)^x} \rightarrow 0$.

$(u_{2p}) \nearrow$, $(u_{2p-1}) \searrow$, $u_{2p-1} - u_{2p} \rightarrow 0$: adjacentes, de limite commune $S(x)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$; il existe p_0 tel que, pour $p \geq p_0$, $|u_{2p} - S(x)| \leq \varepsilon$ et $|u_{2p-1} - S(x)| \leq \varepsilon$. Avec $n_0 = 2p_0$, tout $n \geq n_0$ s'écrit $2p$ ou $2p-1$ avec $p \geq p_0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

c) b) exprime que (u_n) , suite des sommes partielles, converge vers $S(x)$.

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ converge et } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

d) (u_{2p}) croît vers $S(x)$ et (u_{2p+1}) décroît vers $S(x)$:

$$u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}.$$

e) Si $n = 2p : 0 \leq S(x) - u_{2p} \leq u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x}$. Si $n = 2p-1 : 0 \leq u_{2p-1} - S(x) \leq u_{2p-1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p)^x}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

f) On calcule u_n jusqu'à ce que $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \varepsilon$; d'après e), u_n est alors une valeur approchée de $S(x)$ à ε près :

```
def approxS(x, eps):
    n = 1
    u = 1
    while 1 / (n + 1)**x > eps:
        n = n + 1
        u = u + (-1)**(n + 1) / n**x
    return u
```

3. Termes pairs et impairs.

En séparant les indices impairs $k = 2j - 1$ et pairs $k = 2j$ ($1 \leq j \leq p$) :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} - \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x},$$

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

Comme $\sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$:

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

4. Calcul de $S(1)$.

a) Avec $x = 1$ dans 3 : $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

b) C'est une somme de Riemann de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$; par le théorème sur les sommes de Riemann, $v_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Or $v_n = u_{2n}$ (pour $x = 1$) tend vers $S(1)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2 = S(1).$$

5. Calcul de $S(2)$.

Avec $x = 2$ dans 3 : $u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}$.

$$S(2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Problème 2 – Partie II – L'intégrale $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$

$$I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1) \text{ et } I(1) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Corrigé – Problème 2.**6. Convergence.**

$t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$, elle est majorée par $t^x e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ (croissances comparées) : $\int_1^{+\infty}$ converge pour tout x . En 0, elle est équivalente à $\frac{t^x}{2}$, et

$\int_0^1 t^x dt$ converge si et seulement si $x > -1$ (Riemann).

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt \text{ converge} \iff x > -1.$$

7. Développement de $I(x)$.

a) Pour $t > 0$, par la somme géométrique de raison $-e^{-t} \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} e^{-kt} = e^{-t} \frac{1 - (-e^{-t})^n}{1 + e^{-t}} = \frac{1 - (-1)^n e^{-nt}}{e^t + 1}.$$

En multipliant par t^x :

$$g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}.$$

b) La fonction $t \mapsto kt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même ; le changement de variable $u = kt$ conserve la nature de l'intégrale, et $\int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \Gamma(x+1)$ converge car $x+1 > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

c) $0 \leq g_x(t) e^{-nt} \leq \frac{1}{2} t^x e^{-nt}$ ($1 + e^t \geq 2$) ; par comparaison et b) :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\Gamma(x+1)}{2n^{x+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

d) En intégrant a) (intégrales convergentes) et avec b) :

$$I(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (c) et partie I, avec $x+1 > 0$) :

$$I(x) = S(x+1) \Gamma(x+1).$$

8. Valeur de $I(1)$.

$$I(1) = S(2) \Gamma(2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Problème 2 – Partie III – La loi logistique

$$F_X(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}, Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{densité } e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$

Corrigé – Problème 2.**9. Parité.**

$$f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}e^{2t}}{(e^t+1)^2} = f(t).$$

 f est paire.
10. Densité.

f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $F : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ en est une primitive (dérivée $\frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = f(x)$), de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$.

 f est une densité de probabilité.
11. Fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

12. Moments.

- a) $0 \leq t^n f(t) \leq t^n \frac{e^t}{e^{2t}} = t^n e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$: $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ converge. Par parité de $|t|^n f(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^n f(t) dt$ converge.

 X admet un moment d'ordre n .

- b) $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est impaire et son intégrale converge :

$$m_{2p+1}(X) = 0.$$

- c) Par parité, $m_{2p}(X) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2p} f(t) dt$. Sur $[0, A]$, on intègre par parties avec $a(t) = t^{2p}$ et $b(t) = -\frac{1}{1+e^t}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a'(t) = 2pt^{2p-1}$, $b'(t) = f(t)$:

$$\int_0^A t^{2p} f(t) dt = -\frac{A^{2p}}{1+e^A} + 2p \int_0^A \frac{t^{2p-1}}{1+e^t} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2p I(2p-1).$$

$$m_{2p}(X) = 4p I(2p-1).$$

13. Espérance et variance.

$\mathbb{E}(X) = m_1(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = m_2(X) = 4I(1)$:

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{3}.$$

14. Le maximum.

- a) Par indépendance, $F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(\bigcap_i [X_i \leq x]) = F_X(x)^n$, et $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$:

$$F_{Y_n}(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^n, \quad F_{Z_n}(x) = \left(\frac{ne^x}{1+ne^x} \right)^n = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right)^{-n}.$$

- b) Pour x fixé, $-n \ln(1 + \frac{e^{-x}}{n}) \sim -e^{-x}$, donc $F_{Z_n}(x) \rightarrow G(x) = \exp(-e^{-x})$. G est continue, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, de classe $\mathcal{C}^1$: c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, de densité G' . Par définition de la convergence en loi :

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad \text{de densité } x \mapsto e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$