

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On rappelle que $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

Partie I – Étude de la fonction φ

Partie I – Convergence, imparité, périodicité, continuité de φ

Questions 1 à 4.

Corrigé – Partie I.

1. Convergence de $\sum u_n(x)$.

Soit $x \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - x^2 \neq 0$ car $x \neq \pm n$, donc $u_n(x)$ est bien défini. Comme $x \neq 0$,

$$|u_n(x)| = \frac{2|x|}{|n^2 - x^2|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$) ; par comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n(x)|$ converge.

Pour tout $x \in D$, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.

2. Imparité et périodicité.

a) D est symétrique par rapport à 0 et, pour $x \in D$, $u_n(-x) = -u_n(x)$, d'où par linéarité de la somme

$$\varphi(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n(x)) = -\varphi(x). \quad \boxed{\varphi \text{ est impaire.}}$$

b) Pour $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{(n+x) - (n-x)}{(n-x)(n+x)} = \boxed{\frac{2x}{n^2 - x^2}}.$$

c) Soit $x \in D$; alors $x+1 \in D$. Pour $N \geq 2$, posons $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$. D'après

b), par décalage d'indice ($m = n - 1$ puis $m = n + 1$) :

$$\begin{aligned} S_N(x+1) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n-1-x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1+x} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m-x} - \sum_{m=2}^{N+1} \frac{1}{m+x} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{m-x} - \frac{1}{m+x} \right) - \frac{1}{N-x} - \frac{1}{N+1+x} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + S_N(x) - \frac{1}{N-x} - \frac{1}{N+1+x}. \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$: $\sum_{n \geq 1} u_n(x+1) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{n \geq 1} u_n(x)$, donc

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \varphi(x). \quad \boxed{\varphi(x+1) = \varphi(x).}$$

Par récurrence (dans les deux sens), $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in D$.

3. Continuité de φ .

- a) Soit $x \in D \cup \{0, 1\}$. Pour $n \geq 2$, $n^2 - x^2 \neq 0$ (car $x \notin \mathbb{Z}$ ou $x \in \{0, 1\}$). Si $x = 0$, tous les termes sont nuls. Sinon, $\left| \frac{2x}{n^2 - x^2} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2}$ et, comme en 1, la série converge absolument. L'égalité des deux écritures vient de 2.b).

$$\boxed{g(x) \text{ existe pour tout } x \in D \cup \{0, 1\}.}$$

- b) Pour $x \in D$, en isolant le terme d'indice 1 et avec 2.b) : $\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + g(x)$, d'où

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).}$$

- c) Soient $h \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $x \in [0, 1]$. Alors $x+h \in]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, dont les seuls entiers sont 0 et 1, donc x et $x+h$ sont dans $D \cup \{0, 1\}$. Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n-x} &= \frac{h}{(n-x-h)(n-x)}, \\ -\frac{1}{n+x+h} + \frac{1}{n+x} &= \frac{h}{(n+x+h)(n+x)}. \end{aligned}$$

Or $n-x \geq n-1 > 0$, $n-x-h \geq n-\frac{3}{2} > 0$, $n+x \geq n-1$ et $n+x+h \geq n-\frac{1}{2} \geq n-\frac{3}{2}$. Ainsi chacun des deux termes est majoré en valeur absolue par $\frac{|h|}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$.

La série de terme général $\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \sim \frac{2}{n^2}$ converge, donc C_* existe et, par inégalité triangulaire sur les sommes partielles puis passage à la limite :

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{h}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{h}{(n+x+h)(n+x)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2|h|}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq C_* |h|.$$

- d) Soient $x, y \in [0, 1]$ avec $|y - x| < \frac{1}{2}$. Avec $h = y - x$, c) donne $|g(y) - g(x)| \leq C_* |y - x| \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$: g est continue sur $[0, 1]$. Sur $]0, 1[$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$ est continue, donc par b) φ est continue sur $]0, 1[$.

Enfin $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$ et, pour $x \in]k, k+1[$, $\varphi(x) = \varphi(x - k)$ (2.c)) : sur cet intervalle, φ est la composée de $x \mapsto x - k$ (continue, à valeurs dans $]0, 1[$) et de $\varphi|_{]0, 1[}$, donc continue.

g est continue sur $[0, 1]$ et φ est continue sur D .

4. Comportement en 0 et en 1.

- a) Pour $x \in]0, 1[$, d'après 3.b) : $\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$. Par continuité de g en 0 et puisque $g(0) = 0$, cette quantité tend vers $-1 + 1 - 0 = 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \frac{1}{x}$ étant impaire, sa limite en 0^- est aussi 0. Enfin $x\varphi(x) = 1 + x \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

- b) Pour $x \in D$, $\varphi(x) = \varphi(x - 1)$ par périodicité. En posant $y = x - 1 \rightarrow 0$, a) donne :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Partie II – Étude de l'opérateur T

Partie II – L'opérateur T , calcul de φ et de $\zeta(2)$

Questions 5 à 10.

Corrigé – Partie II.

5. T est un endomorphisme de E .

Soit $f \in E$. Pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\frac{x+1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $T(f)$ est bien définie ; elle est continue sur $[0, 1]$ comme somme de composées de fonctions continues. Pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a immédiatement $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.

$$T \in \mathcal{L}(E).$$

6. Étude de T sur F_n .

- a) Pour $0 \leq k \leq n$ et $x \in [0, 1]$, par la formule du binôme :

$$[T(e_k)](x) = \frac{x^k}{2^k} + \frac{(x+1)^k}{2^k} = \frac{2}{2^k} x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{j}}{2^k} x^j,$$

donc $T(e_k) = 2^{1-k}e_k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} 2^{-k} e_j \in F_k \subset F_n$. Par linéarité de T :

$$\boxed{\forall f \in F_n, T(f) \in F_n.}$$

- b) D'après a), la matrice $A_n = (a_{j,k})_{0 \leq j,k \leq n}$ de T_n dans B_n (colonne k = coordonnées de $T(e_k)$) est triangulaire supérieure :

$$\boxed{a_{j,k} = \frac{\binom{k}{j}}{2^k} \quad (j < k), \quad a_{k,k} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad a_{j,k} = 0 \quad (j > k).}$$

Par exemple pour $n = 2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Ici ce sont les $n+1$ réels deux à deux distincts $2, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$; un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$ ayant $n+1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Sp}(T_n) = \{2^{1-k}, 0 \leq k \leq n\} \quad \text{et} \quad T_n \text{ est diagonalisable.}}$$

7. Noyau de $T - 2\text{id}_E$.

- a) $T(e_0) = e_0 + e_0 = 2e_0$ et $e_0 \neq 0$.

$$\boxed{e_0 \in \text{Ker}(T - 2\text{id}_E), \text{ qui n'est donc pas réduit à } \{0\}.}$$

(Les extremums m et M existent car f est continue sur le segment $[0, 1]$: théorème des bornes atteintes.)

- b) Comme $T(f) = 2f$, en $x_0 : f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m$. Les deux termes sont $\geq m$; si l'un était $> m$, la somme serait $> 2m$.

$$\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m.}$$

- c) Récurrence : $f(x_0) = m$. Si $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$, alors $\frac{x_0}{2^n} \in [0, 1]$ est un point où f atteint son minimum, et b) appliqué à ce point donne $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m.}$$

- d) $\frac{x_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et f est continue en 0, donc $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \rightarrow f(0)$; la suite étant constante égale à m :

$$\boxed{m = f(0).}$$

- e) Les mêmes arguments, inégalités renversées ($f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) = 2M$ avec deux termes $\leq M$), donnent $f\left(\frac{x_1}{2}\right) = M$, puis $f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$ pour tout n , puis

$$\boxed{M = f(0).}$$

f) Ainsi $m = M = f(0)$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(0) = m \leq f(x) \leq M = f(0)$.

$$f \text{ est constante : } \text{Ker}(T - 2 \text{id}_E) = \text{Vect}(e_0).$$

8. Étude de $\cot$.

a) $\sin(\pi x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$; donc $\cot$ est définie sur D , et continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D est symétrique, $\cos$ est paire et $\sin$ impaire, donc $\cot(-x) = -\cot(x)$. Enfin $x+1 \in D$ et $\cos(\pi x + \pi) = -\cos(\pi x)$, $\sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$, donc $\cot(x+1) = \cot(x)$.

$$\cot \text{ est continue sur } D, \text{ impaire et 1-périodique.}$$

b) Quand $x \rightarrow 0$, $\cos(\pi x) \rightarrow 1$ et $\sin(\pi x) \sim \pi x$, donc $\cot(x) \sim \frac{\pi}{\pi x} = \frac{1}{x}$. Ensuite, par la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 :

$$\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{2} - \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^3),$$

et $x \sin(\pi x) \sim \pi x^2$. Donc

$$\cot(x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\pi^3 x^3/3}{\pi x^2}.$$

$$\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x.$$

c) Par périodicité, $\cot(x) = \cot(x-1)$; avec $y = x-1 \rightarrow 0$ dans b) :

$$\cot(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad \cot(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}(x-1).$$

d) Soit $x \in D$. Si $\frac{x}{2} = p \in \mathbb{Z}$ alors $x = 2p \in \mathbb{Z}$; si $\frac{x+1}{2} = p \in \mathbb{Z}$ alors $x = 2p-1 \in \mathbb{Z}$: absurde dans les deux cas. Posons $a = \frac{\pi x}{2}$. On a $\sin a \neq 0$ et $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a \neq 0$, et $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$. Donc

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi \frac{\cos a}{\sin a} - \pi \frac{\sin a}{\cos a} = \pi \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \pi \frac{\cos(2a)}{\frac{1}{2} \sin(2a)}.$$

$$\frac{x}{2} \in D, \quad \frac{x+1}{2} \in D, \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cot(x).$$

9. Calcul de φ .

a) Pour $x \in D$ et $N \in \mathbb{N}^*$, posons $\sigma_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n}$. En regroupant les indices n et $-n$:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N u_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Pour $x \in D$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont dans D (8.d) et

$$\begin{aligned} \sigma_N\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x+2n} + \sum_{n=-N}^N \frac{2}{x+2n+1} = 2 \sum_{m=-2N}^{2N+1} \frac{1}{x+m} \\ &= 2\sigma_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}. \end{aligned}$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, $\sigma_{2N}(x) \rightarrow \varphi(x)$ (suite extraite) et $\frac{2}{x+2N+1} \rightarrow 0$.

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

- b) Sur $]0, 1[\subset D$, écrivons $\varphi(x) - \cot(x) = \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) - \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right)$; par 4.a) et 8.b), cette quantité tend vers 0 en 0. De même avec $\frac{1}{x-1}$, par 4.b) et 8.c), elle tend vers 0 en 1.

$$f = \varphi - \cot \text{ se prolonge par continuité sur } [0, 1] \text{ en posant } f(0) = f(1) = 0.$$

- c) Ainsi $f \in E$. Pour $x \in]0, 1[$, $\frac{x}{2} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\frac{x+1}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[$, donc par 8.d) et 9.a) :

$$[T(f)](x) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) - \left(\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = 2\varphi(x) - 2\cot(x) = 2f(x).$$

Les fonctions $T(f)$ et $2f$ étant continues sur $[0, 1]$, l'égalité s'étend en 0 et 1 par passage à la limite. Donc $f \in \text{Ker}(T - 2\text{id}_E)$: d'après 7, f est constante, égale à $f(0) = 0$. Ainsi $\varphi = \cot$ sur $]0, 1[$, puis sur D car les deux fonctions sont 1-périodiques (2.c) et 8.a)).

$$\forall x \in D, \quad \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

10. Première application.

- a) D'après 8.b), $x \cot(x) = 1 + x \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{3}x^2 + o(x^2)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- b) Pour $x \in]0, 1[$, les deux séries convergent ($\frac{1}{n^2 - x^2} \sim \frac{1}{n^2}$) et

$$\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 - x^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2(n^2 - x^2)} = \frac{x^2}{1 - x^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2(n^2 - x^2)}.$$

Pour $n \geq 2$, $n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 > 0$, d'où $0 \leq \frac{x^2}{n^2(n^2 - x^2)} \leq \frac{x^2}{n^2(n^2 - 1)}$, terme général d'une série convergente ($\sim \frac{x^2}{n^4}$). En sommant :

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

- c) Par b), $0 \leq \delta(x) \leq \frac{x^2}{1 - x^2} + x^2 \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$; par encadrement $\delta(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- d) Pour $x \in]0, 1[$, 9.c) donne $1 - x \cot(x) = x \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{n^2 - x^2}$, soit $\frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - x^2}$. Par a) et c), en faisant $x \rightarrow 0^+$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie III – Développement eulérien de la fonction sinus

Partie III – Produit infini du sinus

Questions 11 à 13.

Corrigé – Partie III.

11. Convergence de $\sum \alpha_n(x)$.

Soit $x \in [0, 1[$. Pour $n \geq 1$, $0 \leq \frac{x^2}{n^2} < 1$, donc $\alpha_n(x)$ est défini et $\alpha_n(x) \leq 0$. Si $x = 0$, tous les termes sont nuls. Sinon, $\frac{x^2}{n^2} \rightarrow 0$ et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donnent $-\alpha_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$; par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ (termes positifs), $\sum(-\alpha_n(x))$ converge.

Pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum \alpha_n(x)$ converge.

12. Explicitation de β .

Soit $x \in]0, 1[$.

- a) Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, x]$, $n^2 - t^2 > 0$ et $t \mapsto \ln(n^2 - t^2)$ a pour dérivée $\frac{-2t}{n^2 - t^2}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right). \quad \boxed{\int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt = \beta_N(x).}$$

- b) La fonction $t \mapsto \varphi(t) - \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, x]$ (3.d)) et tend vers 0 en 0 (4.a)) : elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0, x]$.

$$\boxed{\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt \text{ existe (intégrale faussement impropre).}}$$

- c) Pour $t \in]0, x]$, $\varphi(t) - \frac{1}{t} - \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} = -\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}$. Pour $n \geq N+1 \geq 2$, $n^2 - t^2 \geq n^2 - 1 > 0$, donc

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq 2t R_N, \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

(série convergente car $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$). Par croissance de l'intégrale (avec la valeur 0 en $t = 0$) :

$$\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt \right| \leq R_N \int_0^x 2t dt = x^2 R_N.$$

$$\boxed{\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

- d) R_N est le reste d'une série convergente, donc $R_N \rightarrow 0$. Par a) et c), $\beta_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$; or $\beta_N(x) \rightarrow \beta(x)$ par définition.

$$\boxed{\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt.}$$

- e) Par 9.c), pour $t \in]0, x]$, $\varphi(t) - \frac{1}{t} = \pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{t}$ avec $\sin(\pi t) > 0$; une primitive sur $]0, 1[$ est $t \mapsto \ln(\sin(\pi t)) - \ln t = \ln \frac{\sin(\pi t)}{t}$. Pour $\varepsilon \in]0, x[$:

$$\int_{\varepsilon}^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt = \ln \frac{\sin(\pi x)}{x} - \ln \frac{\sin(\pi \varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\sin(\pi x)}{x} - \ln \pi,$$

car $\frac{\sin(\pi \varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \pi$ et $\ln$ est continue en π . L'intégrande étant prolongeable par continuité sur $[0, x]$, le membre de gauche tend vers $\int_0^x$, d'où par d) :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \beta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right).$$

13. Le produit P .

- a) Soit $x \in [0, 1[$. Chaque facteur $1 - \frac{x^2}{k^2}$ est > 0 , donc $P_n(x) = \pi x \exp(\beta_n(x))$. Comme $\beta_n(x) \rightarrow \beta(x)$ (question 11) et que $\exp$ est continue :

$$P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi x \exp(\beta(x)).$$

- b) D'après a), $P(x) = \pi x \exp(\beta(x))$. Si $x = 0$, $P(0) = 0 = \sin 0$. Si $x \in]0, 1[$, 12.e) donne $\pi x \exp(\beta(x)) = \pi x \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x).$$

- c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_0 > |x|$. Pour $n > N_0$:

$$P_n(x) = P_{N_0}(x) \prod_{k=N_0+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = P_{N_0}(x) \exp \left(\sum_{k=N_0+1}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \right),$$

les facteurs étant > 0 . Comme en 11, $-\ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \geq 0$ et est équivalent à $\frac{x^2}{k^2}$ (ou nul si $x = 0$), donc la série $\sum_{k>N_0} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$ converge ; par continuité de $\exp$:

$$(P_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge pour tout réel } x.$$

- d) On a $P_n(x) = \frac{\pi x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n (k-x) \prod_{k=1}^n (k+x)$. Or, par décalage d'indice,

$$(n-x) \prod_{k=1}^n (k-1-x) = (-x) \prod_{j=1}^n (j-x),$$

$$(x+1) \prod_{k=1}^n (k+1+x) = \prod_{j=1}^{n+1} (j+x) = (n+1+x) \prod_{j=1}^n (j+x).$$

Donc

$$(n-x)P_n(x+1) = \frac{\pi}{(n!)^2} (-x) \prod_{j=1}^n (j-x) (n+1+x) \prod_{j=1}^n (j+x) = -(n+1+x)P_n(x).$$

Comme $x \in]-n, n[$, $n-x \neq 0$:

$$P_n(x+1) = -\frac{n+1+x}{n-x} P_n(x).$$

- e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, d) s'applique ; quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n+1+x}{n-x} \rightarrow 1$, $P_n(x+1) \rightarrow P(x+1)$ et $P_n(x) \rightarrow P(x)$ (c)). Donc $P(x+1) = -P(x)$, puis $P(x+2) = -P(x+1) = P(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = -P(x) \quad \text{et} \quad P \text{ est 2-périodique.}$$

- f) Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, P(x) = \sin(\pi x)\}$. Par b), $[0, 1[\subset A$. Comme $P(x+1) = -P(x)$ et $\sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$, on a $x \in A \iff x+1 \in A$. Par récurrence, $[k, k+1[\subset A$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Partie IV – Un autre développement du sinus

Partie IV – Développement de $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Questions 14 à 19.

Corrigé – Partie IV.

14. Convergence de $\sum \nu_n(x)$.

Si $x = 0$, $\nu_n(0) = 0$. Si $x \in D$, $n^2 - x^2 \neq 0$ et $|\nu_n(x)| = \frac{|x|}{|n^2 - x^2|} \sim \frac{|x|}{n^2}$; par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum \nu_n(x)$ converge absolument.

$$\psi \text{ est définie sur } D \cup \{0\}.$$

15. Calcul de $\lambda_n(x)$.

Si $x = 0$: $\lambda_n(0) = \int_0^\pi \cos(nt) dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = 0 = \sin(0)\nu_n(0)$.

Si $x \in D$: $x+n \neq 0$ et $x-n \neq 0$, et la formule rappelée donne

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((x+n)t) + \cos((x-n)t)) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} + \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} \right).$$

Or $\sin(\pi x \pm n\pi) = (-1)^n \sin(\pi x)$, donc

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^n \sin(\pi x)}{2} \cdot \frac{(x-n) + (x+n)}{x^2 - n^2} = \frac{(-1)^n x \sin(\pi x)}{x^2 - n^2}.$$

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) \nu_n(x).$$

16. La somme $C_n(t)$.

- a) Les formules d'addition donnent $\sin(p+q) - \sin(p-q) = 2 \cos p \sin q$. Avec $p = kt$ et $q = \frac{t}{2}$:

$$2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) = \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right).$$

En sommant pour k de 1 à n (somme télescopique) : $2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) C_n(t) = \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sin\frac{t}{2} \neq 0$ et

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

b) Si $t = 2p\pi$, $\cos(kt) = 1$ pour tout k :

$$C_n(2p\pi) = n.$$

c) Par linéarité : $I_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi)}{k}$.

$$I_n = 0.$$

17. Limite de $\int_0^\pi F(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$.

Posons $\omega_n = \frac{2n+1}{2} > 0$. Les fonctions F et $u : t \mapsto -\frac{\cos(\omega_n t)}{\omega_n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$, avec $u'(t) = \sin(\omega_n t)$. Par intégration par parties :

$$\int_0^\pi F(t) \sin(\omega_n t) dt = \left[-\frac{F(t) \cos(\omega_n t)}{\omega_n} \right]_0^\pi + \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi F'(t) \cos(\omega_n t) dt.$$

Comme $|\cos| \leq 1$ et F' est continue sur $[0, \pi]$:

$$\left| \int_0^\pi F(t) \sin(\omega_n t) dt \right| \leq \frac{1}{\omega_n} \left(|F(\pi)| + |F(0)| + \int_0^\pi |F'(t)| dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0.$$

18. La fonction Φ_x .

Soit $x \in D$.

a) Sur $]0, \pi]$, $\sin\frac{t}{2} > 0$ et Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient, avec

$$\Phi'_x(t) = \frac{-x \sin(xt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) (\cos(xt) - 1)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Continuité et dérivabilité en 0. Par Taylor-Young, $\cos(xt) - 1 = -\frac{x^2 t^2}{2} + o(t^2)$ et $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$ quand $t \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\Phi_x(t) - \Phi_x(0)}{t} = \frac{\cos(xt) - 1}{t \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2 t^2/2}{t^2/2} = -x^2.$$

Ainsi Φ_x est dérivable en 0 avec $\Phi'_x(0) = -x^2$ (et donc continue en 0).

Continuité de Φ'_x en 0. Quand $t \rightarrow 0$: $\sin(xt) \sin\frac{t}{2} = \frac{xt^2}{2} + o(t^2)$ et $\cos\frac{t}{2} (\cos(xt) - 1) = -\frac{x^2 t^2}{2} + o(t^2)$, donc le numérateur vaut $-\frac{x^2 t^2}{2} + \frac{x^2 t^2}{4} + o(t^2) = -\frac{x^2 t^2}{4} + o(t^2)$, tandis que le dénominateur est équivalent à $\frac{t^2}{4}$. Donc $\Phi'_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -x^2 = \Phi'_x(0)$.

$$\Phi_x \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi], \text{ avec } \Phi'_x(0) = -x^2.$$

- b) Pour $t \in]0, \pi]$ (donc $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$), on multiplie la formule de 16.a) par $\cos(xt) - 1$, et $\frac{\cos(xt)-1}{\sin(t/2)} = \Phi_x(t)$. Pour $t = 0$, les deux membres sont nuls ($\cos 0 - 1 = 0$ et $\Phi_x(0) = 0$).

$$\forall t \in [0, \pi], \quad C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right).$$

- c) Par linéarité, $\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = \int_0^\pi C_n(t) \cos(xt) dt = \int_0^\pi C_n(t)(\cos(xt) - 1) dt + I_n$. On intègre b) sur $[0, \pi]$, avec $\int_0^\pi (\cos(xt) - 1) dt = \frac{\sin(\pi x)}{x} - \pi$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2x} \sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt + I_n.$$

19. Application.

Soit $x \in D$.

- a) Par 15, $\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = \sin(\pi x) \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi x) \psi(x)$ (question 14). Dans le membre de droite de 18.c), $I_n = 0$ (16.c)) et l'intégrale tend vers 0 d'après 17 appliquée à $F = \Phi_x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ (18.a)). Par unicité de la limite :

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

- b) Comme $x \notin \mathbb{Z}$, $\sin(\pi x) \neq 0$; en divisant par $\frac{1}{2} \sin(\pi x)$: $2\psi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, et $2\psi(x) = 2x \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$ par linéarité.

$$\forall x \in D, \quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$