

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2016

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Étude de la fonction φ	2
<i>Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.</i>	2
2 Étude de l'opérateur T	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction.</i>	3
3 Développement eulérien de la fonction sinus	4
<i>Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable ; intégrales.</i>	4
4 Un autre développement du sinus	5
<i>Thèmes abordés : séries ; intégrales ; fonctions d'une variable.</i>	5

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ , des expressions des fonctions $\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$, $\sin(\pi x)$ et $\frac{1}{\sin(\pi x)}$ comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens). Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ puis, dans la partie III, de la fonction sinus.

Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin(\pi x)}$.

1 Étude de la fonction φ

Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

est convergente. Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D .

2. Imparité et périodicité de φ .

- a) Justifier que φ est impaire.
- b) Vérifier que, pour $x \in D$,

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}.$$

- c) Montrer que, pour $x \in D$, $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. La fonction φ est donc périodique de période 1.

3. Continuité de φ .

- a) Justifier, pour $x \in D \cup \{0, 1\}$, l'existence de

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right).$$

- b) Vérifier que, pour tout $x \in D$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - g(x).$$

c) Soit $h \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq C_* |h|,$$

$$\text{où } C_* = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1) \left(n - \frac{3}{2}\right)}.$$

d) En déduire que g est continue sur $[0, 1]$ puis que φ est continue sur $]0, 1[$. La fonction φ est donc continue sur D .

4. Étude de φ en 0 et en 1.

a) Montrer que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

2 Étude de l'opérateur T

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction.

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles. T est l'application définie sur E par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note, pour tout entier naturel k , e_k l'élément de E défini par $\forall x \in [0, 1], e_k(x) = x^k$ et, pour tout entier naturel n , F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_k)_{0 \leq k \leq n}$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E .

6. Étude de T sur F_n .

a) Vérifier que $\forall f \in F_n, T(f) \in F_n$. On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$.

b) Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n .

c) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7. Étude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2 \text{id}_E)$.

a) Montrer que $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

b) Soit $f \in \text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$. On note $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$. On fixe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $m = f(x_0)$ et $x_1 \in [0, 1]$ tel que $M = f(x_1)$. Montrer que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.

d) En déduire que $m = f(0)$.

e) Faire une étude similaire pour M .

f) Montrer alors que f est constante.

8. Étude de la fonction cot. Pour tout $x \in D$, on note $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a) Vérifier que cot est définie et continue sur D , qu'elle est impaire et périodique de période 1.

- b) Montrer que $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x$.
- c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.
- d) Démontrer que, pour tout $x \in D$, $\frac{x}{2} \in D$, $\frac{x+1}{2} \in D$ et

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x).$$

9. Calcul de φ .

- a) Vérifier que, pour tout $x \in D$,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

- b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.
- c) Démontrer alors que $\varphi = \cot$. Autrement dit,

$$\forall x \in D, \quad \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

10. Première application.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$.
- b) Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Vérifier que

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

- c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- d) Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3 Développement eulérien de la fonction sinus

Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable ; intégrales.

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0, 1[$, on pose

$$\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x).$$

11. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors $\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$.
12. **Explicitation de β .** On fixe $x \in]0, 1[$.

a) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

b) Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

c) Montrer que

$$\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

d) En déduire que $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

e) Montrer alors que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\beta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right).$$

13. Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , on pose $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente. Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$.

b) Vérifier que, pour tout $x \in [0, 1[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

c) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est en fait convergente pour tout réel x . On note encore $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-n, n[$. Montrer que

$$P_n(x+1) = -\frac{n+1+x}{n-x} P_n(x).$$

e) En déduire que, pour tout réel x , $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

f) Montrer alors que, pour tout réel x , $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

4 Un autre développement du sinus

Thèmes abordés : séries ; intégrales ; fonctions d'une variable.

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout $x \in D \cup \{0\}$, on pose

$$\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad \nu_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$

14. Montrer que, pour tout $x \in D \cup \{0\}$, la série de terme général $\nu_n(x)$ est convergente. La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in D \cup \{0\}$,

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = x \sin(\pi x) \nu_n(x).$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

16. Pour tout réel t et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

- a) Vérifier que, lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- b) Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

- c) Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt$.

17. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0.$$

18. Pour $x \in D$, on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi], \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- a) Montrer que Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

- b) Vérifier que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right).$$

- c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2x} \sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt + I_n.$$

19. Application.

- a) Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que, pour tout $x \in D$,

$$x\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2x} \sin(\pi x) + \frac{\pi}{2}.$$

- b) En déduire que, pour tout $x \in D$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$