HEC Paris – ESSEC

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Partitions de l'identité

Partie I – Exemples et caractérisation des partitions de l'identité

$u_1 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_E$; équivalence de $n = \sum r_i$, « projecteurs » et $u_i \circ u_j = 0$.

Corrigé – Partie I.

1. Exemple 1.

a) A est triangulaire : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -1\}$. A est de rang 2 (colonnes non nulles ${}^t(1,0,0)$ et ${}^t(0,0,-1)$ non colinéaires), donc $\dim E_0 = 1$; $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim E_{-1} = 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2 < 3$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, -1\} \text{ et } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{A^3 + A^2 = 0 \ : \ Q \text{ est annulateur de } A.}$$

c) Si R de degré 2 annule A, ses racines contiennent le spectre $\{0, -1\}$, donc $R = cX(X+1)$ avec $c \neq 0$. Or $A(A + I_3) = A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme annulateur de } A \text{ de degré 2.}}$$

d) Posons $Q_2 = X^2$ et $Q_1 = 1 - X^2$. $A^2 = \mathrm{diag}(0,0,1)$ et $I_3 - A^2 = \mathrm{diag}(1,1,0)$ sont des matrices de projecteurs (elles sont égales à leur carré) et leur somme vaut I_3.

$$\boxed{Q_1 = 1 - X^2, \quad Q_2 = X^2 \ : \ Q_1(f) + Q_2(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \text{ et } Q_i(f)^2 = Q_i(f).}$$

2. Exemple 2.

a) f est diagonalisable : E est la somme directe de ses sous-espaces propres. Pour $x \in E_{\lambda_i}(f)$, $\prod_j (f - \lambda_j \mathrm{id})(x) = 0$ (les facteurs commutent et $(f - \lambda_i \mathrm{id})(x) = 0$) ;

par linéarité, cet endomorphisme est nul sur $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}(f)$.

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f), \qquad \prod_{j=1}^{k}(X-\lambda_j) \text{ est annulateur de } f.}$$

b) $(X-\lambda_i)L_i = c_i \prod_j (X-\lambda_j)$ avec $c_i = \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}$, donc $(f-\lambda_i \mathrm{id}) \circ v_i = 0$ d'après a).

$$\boxed{\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f).}$$

c) $L_i(\lambda_j) = 0$ si $j \neq i$ (facteur $\lambda_j - \lambda_j$) et $L_i(\lambda_i) = 1$, donc $\sum_i L_i(\lambda_j) = 1$. Le polynôme $\sum_i L_i - 1$, de degré $\leq k-1$, a les k racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$: il est nul. Ainsi $\sum_i L_i = 1$ et $\sum_i v_i = \mathrm{id}_E$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j) = 1 \quad \text{et} \quad v_1 + \cdots + v_k = \mathrm{id}_E.}$$

d) Pour $x \in E_{\lambda_j}(f)$, $P(f)(x) = P(\lambda_j)x$ pour tout polynôme P, donc $v_i(x) = L_i(\lambda_j)x = \delta_{i,j}x$. En particulier $E_{\lambda_i}(f) \subset \mathrm{Im}(v_i)$, d'où l'égalité avec b). v_i vaut id sur $E_{\lambda_i}(f)$ et 0 sur $\bigoplus_{j\neq i} E_{\lambda_j}(f)$:

$$\boxed{\mathrm{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f),\ v_i \text{ est le projecteur sur } E_{\lambda_i}(f) \text{ parallèlement à } \bigoplus_{j\neq i} E_{\lambda_j}(f).}$$

3. Partitions de l'identité.

a) Pour $x \in E$, $x = \sum_i u_i(x) \in \sum_i \mathrm{Im}(u_i)$. La dimension d'une somme est au plus la somme des dimensions :

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i) \quad \text{et} \quad n \leq \sum_{i=1}^{k} r_i.}$$

b) Des sous-espaces sont en somme directe si et seulement si la dimension de leur somme est égale à la somme de leurs dimensions (la concaténation de bases est alors une base). Comme $\sum_i \mathrm{Im}(u_i) = E$ est de dimension n :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u_1), \ldots, \mathrm{Im}(u_k) \text{ sont en somme directe } \iff n = \sum_{i=1}^{k} r_i.}$$

c) (i) La trace d'un projecteur est égale à son rang (dans une base adaptée à $\mathrm{Im} \oplus \mathrm{Ker}$, sa matrice est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$). Si (2) est vraie : $\sum_i r_i = \sum_i \mathrm{tr}(u_i) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_E) = n$.

$$\boxed{(2) \Rightarrow (1).}$$

(ii) Supposons (1) : par b), la somme est directe. Soit $x \in E$ et j fixé. D'une part $u_j(x) = \sum_i u_i(u_j(x))$ avec $u_i(u_j(x)) \in \mathrm{Im}(u_i)$; d'autre part $u_j(x) = 0 + \cdots + u_j(x) + \cdots + 0$ est une autre décomposition. Par unicité, $u_i(u_j(x)) = 0$ pour $i \neq j$.

$$\boxed{(1) \Rightarrow (3).}$$

(iii) Si (3) est vraie, $u_j = u_j \circ \mathrm{id}_E = \sum_i u_j \circ u_i = u_j \circ u_j$: chaque u_j est un projecteur.

$$\boxed{(3) \Rightarrow (2), \text{ donc (1), (2), (3) sont équivalentes.}}$$

Partie II – Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

Partie II – Projecteurs orthogonaux et Python

$P^2 = P$ et ${}^tP = P$; multiples de projecteurs orthogonaux.

Corrigé – Partie II.

4. Caractérisations.

a) La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, p est symétrique si et seulement si ${}^tP = P$, et $p \circ p = p$ si et seulement si $P^2 = P$.

($\Rightarrow$) Si $p = p_F$, $p^2 = p$ et, pour $x, y \in E$, $y - p(y) \in F^\perp$ donc $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$; par symétrie de cette expression, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$: p est symétrique.

($\Leftarrow$) p est un projecteur, d'image $F = \mathrm{Im}(p)$ et $E = F \oplus \mathrm{Ker}\, p$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\, p$ et $y \in F$, $\langle x, y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle = 0$: $\mathrm{Ker}\, p \subset F^\perp$, avec égalité par les dimensions. Donc $p = p_F$.

$$\boxed{p \text{ projecteur orthogonal } \iff P^2 = P \text{ et } {}^tP = P.}$$

b) ($\Rightarrow$) Si $f = \alpha p$ avec $P^2 = P = {}^tP$: ${}^tM = M$ et $\mathrm{tr}(M)M^2 = \alpha\,\mathrm{tr}(P)\,\alpha^2 P = \alpha^3 \mathrm{tr}(P)P = \mathrm{tr}(\alpha^2 P)\,\alpha P = \mathrm{tr}(M^2)M$.

($\Leftarrow$) M est symétrique réelle : par le théorème spectral, $M = Q\,\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)\,{}^tQ$ avec Q orthogonale. Notons $T_1 = \mathrm{tr}(M) = \sum \mu_i$ et $T_2 = \mathrm{tr}(M^2) = \sum \mu_i^2$. La relation donne $T_1\mu_i^2 = T_2\mu_i$ pour tout i. Si $M = 0$, $f = 0 \cdot p$ convient. Sinon $T_2 > 0$; si $T_1 = 0$, on aurait $\mu_i = 0$ pour tout i, absurde ; donc tout μ_i non nul vaut $\alpha = \frac{T_2}{T_1}$. Ainsi $M = \alpha P$ avec $P = Q\,\mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n){}^tQ$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, qui vérifie $P^2 = P = {}^tP$: c'est la matrice d'un projecteur orthogonal par a).

$$\boxed{\exists(\alpha, p),\ f = \alpha p \iff \mathrm{tr}(M)M^2 = \mathrm{tr}(M^2)M \text{ et } {}^tM = M.}$$

5. Python.

a) On additionne les coefficients diagonaux :

```
def tr(A):
    n = len(A)
    t = 0
    for i in range(n):
        t = t + A[i, i]
    return t
```

b) La ligne 5 remplace `b` par `True` si `b` valait `True` et si $a_{i,j} = a_{j,i}$, et par `False` sinon : à la fin, `b` vaut `True` si et seulement si $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i < j$, c'est-à-dire si A est symétrique.

`issym(2, np.array([[1,2],[2,3]]))` renvoie `True`,
`issym(2, np.array([[1,2],[0,3]]))` renvoie `False`.

c) On teste l'égalité coefficient par coefficient des matrices $\mathrm{tr}(M)M^2$ et $\mathrm{tr}(M^2)M$ (qui sont symétriques si M l'est, d'où $j \geq i$) :

```
b = b and (A[i, j] == B[i, j])
```

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(M) = 1$, $\mathrm{tr}(M^2) = 3$, et $M^2 \neq 3M$. Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $M^2 = 2M$, $\mathrm{tr}(M) = 2$, $\mathrm{tr}(M^2) = 4$, et $2M^2 = 4M$.

La fonction renvoie `False` pour la première matrice et `True` pour la seconde.

Partie II – Matrice de p_F et inverse de Penrose–Moore

$P = S({}^tSS)^{(-)}\,{}^tS$ est la matrice de p_F.

Corrigé – Partie II.

6. Matrice de p_F.

a) Si ${}^tSSZ = 0$, alors ${}^tZ\,{}^tSSZ = {}^t(SZ)(SZ) = 0$: la somme des carrés des coefficients de SZ est nulle, donc $SZ = 0$. Réciproquement $SZ = 0 \Rightarrow {}^tSSZ = 0$. Les applications $Z \mapsto SZ$ et $Z \mapsto {}^tSSZ$, définies sur $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, ont le même noyau ; par le théorème du rang :

$$\boxed{\operatorname{rg} S = \operatorname{rg}({}^tSS).}$$

b) $y \in F \iff \exists (z_1,\dots,z_k),\ y = \sum_i z_i s_i \iff \exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}),\ Y = SZ.$

$$\boxed{y \in F \iff \exists Z,\ Y = SZ.}$$

c) $y \in F^\perp \iff \forall i,\ \langle s_i, y\rangle = 0 \iff \forall i,\ {}^tS_iY = 0 \iff {}^tSY = 0$ (base $\mathcal{B}$ orthonormale).

$$\boxed{y \in F^\perp \iff {}^tSY = 0.}$$

d) $y = p_F(x) \in F$ donne Z avec $Y = SZ$ (b) ; $x - y \in F^\perp$ donne ${}^tS(X - Y) = 0$ (c), soit ${}^tSX = {}^tSSZ$.

$$\boxed{\exists Z, \quad Y = SZ \quad \text{et} \quad {}^tSX = {}^tSSZ.}$$

e) Si $\mathcal{F}$ est libre, $\operatorname{rg} S = k$, donc ${}^tSS \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est de rang k (a), inversible. Alors $Z = ({}^tSS)^{-1}\,{}^tSX$ et $Y = S({}^tSS)^{-1}\,{}^tSX$ pour tout x :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = S({}^tSS)^{-1}\,{}^tS.}$$

7. Inverse de Penrose–Moore.

a) C'est le théorème spectral pour la matrice symétrique réelle M :

$$\boxed{\exists Q \text{ orthogonale},\ \exists(\rho_i), \quad M = Q\operatorname{Diag}(\rho_1,\dots,\rho_k)\,{}^tQ.}$$

b) Notons $D = \operatorname{Diag}(\rho_i)$, $D^- = \operatorname{Diag}(h(\rho_i))$. Pour tout réel t, $t\,h(t)\,t = t$ et $h(t)\,t\,h(t) = h(t)$, et $DD^- = D^-D = \operatorname{Diag}(\varepsilon_i)$ avec $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Comme ${}^tQQ = I_k$: $MM^{(-)}M = QDD^-D\,{}^tQ = M$, $M^{(-)}MM^{(-)} = M^{(-)}$, et $MM^{(-)} = M^{(-)}M = Q\operatorname{Diag}(\varepsilon_i){}^tQ$ est symétrique.

$$\boxed{M^{(-)} \text{ est une inverse de Penrose–Moore de } M.}$$

On note aussi que $M^{(-)}$ est symétrique et commute avec M.

c) (i) Comme NM est symétrique et ${}^tM = M$: $N = (NM)N = {}^t(NM)N = M\,{}^tN\,N$. De même $M = (MN)M = {}^t(MN)M = {}^tN\,M^2$; en transposant (M^2 symétrique) :

$$\boxed{N = M\,{}^tN\,N \qquad \text{et} \qquad M^2N = M.}$$

(ii) Pour chaque colonne u de U, $M^2u = 0$, donc ${}^tu\,M^2u = {}^t(Mu)(Mu) = \|Mu\|^2 = 0$ et $Mu = 0$.

$$\boxed{M^2U = 0 \Rightarrow MU = 0.}$$

(iii) D'après (i) appliqué à N et à $M^{(-)}$, $M^2U = M - M = 0$, donc $MU = 0$: $MN = MM^{(-)}$. Par ailleurs ${}^tN$ est aussi une inverse de Penrose–Moore de M (transposer les quatre relations, avec ${}^tM = M$) ; donc $M\,{}^tN = MM^{(-)}$, soit $NM = {}^t(M\,{}^tN) = M^{(-)}M$. Alors

$$N = (NM)N = M^{(-)}(MN) = M^{(-)}MM^{(-)} = M^{(-)}.$$

$\boxed{M^{(-)} \text{ est l'unique inverse de Penrose–Moore de } M.}$

8. La matrice P.

Notons $K = {}^tSS$ (symétrique) et $K^- = K^{(-)}$ (symétrique).

a) $\operatorname{rg} P \leq \operatorname{rg} S$. Posons $V = SK^-K - S = S(K^-K - I_k)$. Comme K^-K est symétrique,

$${}^tVV = (K^-K - I_k)K(K^-K - I_k) = (KK^-K - K)(K^-K - I_k) = 0,$$

donc $V = 0$ (la somme des carrés des coefficients de V est $\operatorname{tr}({}^tVV) = 0$), c'est-à-dire $SK^-K = S$. Ainsi $PS = SK^-\,{}^tSS = SK^-K = S$, d'où $\operatorname{rg} S \leq \operatorname{rg} P$.

$$\boxed{\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} S.}$$

b) ${}^tP = SK^-{}^tS = P$ et $P^2 = SK^-KK^-\,{}^tS = SK^-\,{}^tS = P$: par 4.a), P est la matrice d'un projecteur orthogonal, dont l'image est contenue dans F (colonnes de la forme SZ) et de dimension $\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} S = \dim F$. Son image est donc F et

$$\boxed{P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F).}$$

Si $\mathcal{F}$ est libre, K est inversible et K^{-1} vérifie les quatre relations : par unicité, $K^{(-)} = K^{-1}$ et l'on retrouve 6.e).

9. Exemple.

a) ${}^tSS$ non inversible signifie $\operatorname{rg} S < 2$: s_1, s_2 sont liés, et $s_1 \neq 0$.

$$\boxed{\exists \theta \in \mathbb{R},\ \forall i,\ \beta_i = \theta\alpha_i.}$$

b) Avec $a = \sum_i \alpha_i^2 > 0$, ${}^tSS = a\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}$, et ${}^t(1,\theta)$, ${}^t(-\theta,1)$ sont vecteurs propres pour $a(1+\theta^2)$ et 0. En les normant :

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}^tQ\,{}^tSS\,Q = \begin{pmatrix} a(1+\theta^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

c) D'après 7.b) :

$$({}^tSS)^{(-)} = Q\begin{pmatrix} \frac{1}{a(1+\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tQ, \qquad \boxed{({}^tSS)^{(-)} = \frac{1}{a(1+\theta^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.}$$

d) $F = \operatorname{Vect}(s_1)$, donc $p_F(x) = \frac{\langle x, s_1\rangle}{\|s_1\|^2}s_1$ (ce que l'on retrouve avec $P = S({}^tSS)^{(-)}\,{}^tS$) :

$$\boxed{p_F(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.}$$

Partie III – Application probabiliste

Partie III – Vecteurs gaussiens et lois du khi-deux

Théorème de type Cochran et application à l'analyse de variance.

Corrigé – Partie III.

10. Somme de carrés de normales.

$Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (transformation affine). Pour $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_i^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq Y_i \leq \sqrt{t}) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1$, et 0 pour $t \leq 0$. En dérivant pour $t > 0$, Y_i^2 a pour densité $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-t/2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\frac{Y_i^2}{2}$ a pour densité $u \mapsto 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{4\pi u}} = \frac{u^{-1/2}\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\pi}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est une densité, donc son intégrale $\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$ vaut 1 : $\frac{Y_i^2}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$. Les $\frac{Y_i^2}{2}$ sont indépendantes (lemme des coalitions) ; par stabilité des lois gamma, $\frac{1}{2}\sum_i Y_i^2 \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\Big)^2 \hookrightarrow \chi^2(n).}$$

11. Vecteurs gaussiens.

a) Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\sum_i a_i H_i = {}^t aMG = {}^t({}^t Ma)G = \sum_j b_j G_j$ avec $b = {}^t Ma$: c'est une variable gaussienne centrée.

$$\boxed{(H_1, \dots, H_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$$

b) Avec $a = e_i$, G_i est une variable gaussienne centrée : normale ou certaine, elle admet un moment d'ordre 2. Comme $|G_iG_j| \leq \frac{1}{2}(G_i^2 + G_j^2)$, par comparaison :

$$\boxed{G_iG_j \text{ admet une espérance.}}$$

12. Le cas de composantes indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Pour $a \neq 0$, $\sum_i a_i G_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sum_i a_i^2)$ (stabilité des lois normales indépendantes) ; pour $a = 0$, c'est la variable certaine nulle. Par indépendance, $\mathbb{E}(G_iG_j) = \mathbb{E}(G_i)\mathbb{E}(G_j) = 0$ si $i \neq j$, et $\mathbb{E}(G_i^2) = 1$.

$$\boxed{(G_1, \dots, G_n) \text{ est un vecteur gaussien et } \Lambda(G) = I_n.}$$

b) D'après 11.a), $H = QG$ est un vecteur gaussien. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(H_iH_j) = \sum_{k,l} q_{i,k}q_{j,l}\mathbb{E}(G_kG_l)$, soit $\Lambda(H) = Q\Lambda(G)\,{}^tQ = Q\,{}^tQ = I_n = \Lambda(G)$. Par le résultat admis, pour tout $(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{P}(\bigcap_i [H_i \leq x_i]) = \prod_i \Phi(x_i)$. En faisant tendre les x_j ($j \neq i$) vers $+\infty$ (théorème de la limite monotone), $\mathbb{P}(H_i \leq x_i) = \Phi(x_i)$; la fonction de répartition conjointe est donc le produit des fonctions de répartition marginales.

$$\boxed{H_1, \dots, H_n \text{ sont indépendantes et de loi } \mathcal{N}(0,1).}$$

13. Un théorème de Cochran.

Les G_i sont des variables gaussiennes centrées de variance 1, donc de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et indépendantes.

a) Soit u_i l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice P_i dans la base canonique (orthonormale). Les u_i forment une partition de l'identité avec $\sum r_i = n$; d'après 3.c), ce sont

des projecteurs et $u_i \circ u_j = 0$ pour $i \neq j$. Les P_i étant symétriques, ce sont des projecteurs orthogonaux (4.a). Pour $x \in \mathrm{Im}(u_i)$ et $y \in \mathrm{Im}(u_j)$ $(i \neq j)$: $\langle x, y\rangle = \langle u_i(x), u_j(y)\rangle = \langle x, u_i \circ u_j(y)\rangle = 0$.

Les P_i sont des matrices de projecteurs orthogonaux d'images deux à deux orthogonales.

b) D'après 3.b), $\mathbb{R}^n = \bigoplus_i \mathrm{Im}(u_i)$, et ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux. En juxtaposant des bases orthonormales de chaque $\mathrm{Im}(u_i)$, on obtient une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u_i a pour matrice D_i, diagonale à coefficients dans $\{0, 1\}$ (1 exactement sur les vecteurs de $\mathrm{Im}(u_i)$). Si R est la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique à $\mathcal{C}$ et $Q = {}^tR$:

$$\boxed{QP_i\,{}^tQ = D_i \text{ est diagonale pour tout } i.}$$

c) Soit $H = QG$: d'après 12.b), les H_j sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors ${}^tGP_1G = {}^tG\,{}^tQD_1QG = {}^tHD_1H = \sum_{j\in I_1} H_j^2$, où I_1 est l'ensemble des r_1 indices où D_1 vaut 1. Par 10 (avec $\mu = 0$, $\sigma = 1$) :

$$\boxed{{}^tGP_1G \hookrightarrow \chi^2(r_1).}$$

d) De même ${}^tGP_iG = \sum_{j\in I_i} H_j^2$, et les ensembles $I_1, \dots, I_k$ sont deux à deux disjoints. Par le lemme des coalitions :

$$\boxed{{}^tGP_1G, \dots, {}^tGP_kG \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

14. Application.

On note G le vecteur colonne des qm variables $X_{i,j}$ (indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donc vecteur gaussien par 12.a), $N = qm$, $\mathbf{1}$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1, et W le sous-espace des vecteurs $(y_{i,j})$ ne dépendant que de j ($\dim W = m$, $\mathbf{1} \in W$).

a) $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{qm})$ (stabilité des lois normales). Soit $P_1 = \frac{1}{N}J_N$ (matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$, symétrique de rang 1) et $P_2 = I_N - P_1$ (rang $N - 1$) : $P_2G = (X_{i,j} - \overline{X})$ et ${}^tGP_2G = \|P_2G\|^2 = \sum_{i,j}(X_{i,j} - \overline{X})^2$. Par 13.c), cette variable suit $\chi^2(qm - 1)$. Dans la construction de 13.b), on peut prendre $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}$ comme premier vecteur de $\mathcal{C}$: alors $H_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum X_{i,j} = \sqrt{qm}\,\overline{X}$ et ${}^tGP_2G = \sum_{j\geq 2} H_j^2$, qui sont indépendantes par le lemme des coalitions.

$$\boxed{\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{qm}\Big), \quad \sum_{i,j}(X_{i,j} - \overline{X})^2 \hookrightarrow \chi^2(qm - 1), \text{ indépendantes.}}$$

b) Soit P_W la matrice du projecteur orthogonal sur W : $(P_WG)_{i,j} = Z_j$ (projection sur les vecteurs constants en i). Posons $P_1 = \frac{1}{N}J_N$, $P_2 = P_W - P_1$, $P_3 = I_N - P_W$: ces matrices sont symétriques, de somme I_N, et P_2 est la matrice du projecteur orthogonal sur $W \cap \mathbf{1}^\perp$ (car $\mathrm{Vect}(\mathbf{1}) \subset W$), de rang $m - 1$; P_3 est de rang $qm - m$. Les rangs ont pour somme N. Or

$${}^tGP_3G = \|G - P_WG\|^2 = \sum_{i,j}(X_{i,j} - Z_j)^2,$$

$${}^tGP_2G = \|P_WG - P_1G\|^2 = \sum_{i,j}(Z_j - \overline{X})^2 = q\sum_j (Z_j - \overline{X})^2.$$

Par 13.c) et 13.d) :

$$\sum_{i,j}(X_{i,j}-Z_j)^2 \hookrightarrow \chi^2(m(q-1)), \quad q\sum_j (Z_j-\overline{X})^2 \hookrightarrow \chi^2(m-1), \text{ indépendantes.}$$