

HEC Paris – ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2016

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Partie I. Partitions de l'identité	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	2
2	Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal	3
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; Python.</i>	3
3	Partie III. Application probabiliste	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; estimations.</i>	5

Dans tout le problème, n et k sont deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$, et E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donc euclidien. On note 0_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ respectivement le vecteur nul et l'endomorphisme nul de E , et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . L'endomorphisme identité de E est noté id_E .

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on note $F^\perp$ l'orthogonal de F et p_F le projecteur orthogonal d'image F , c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E tel que $p_F(x) = x$ pour tout $x \in F$ et $p_F(x) = 0_E$ pour tout $x \in F^\perp$.

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes ($m \geq 1$) à coefficients réels. La transposée d'une matrice A est notée tA . Pour $(\rho_1, \dots, \rho_k) \in \mathbb{R}^k$, $\text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)$ désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\rho_1, \dots, \rho_k$. Enfin, I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que la somme de k sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$ de E , notée $\sum_{i=1}^k F_i$, est définie par

$$\sum_{i=1}^k F_i = \left\{ \sum_{i=1}^k x_i ; (x_1, \dots, x_k) \in F_1 \times \dots \times F_k \right\}.$$

Ces sous-espaces sont en somme directe lorsque chaque vecteur de $\sum_{i=1}^k F_i$ admet une unique décomposition de cette forme; la somme est alors notée $\bigoplus_{i=1}^k F_i$.

L'objet de ce problème est de mettre en évidence quelques propriétés algébriques dont les conséquences probabilistes fondent les tests statistiques permettant de mesurer l'influence effective d'une ou plusieurs variables explicatives sur une variable endogène. La partie III est indépendante des parties I et II.

1 Partie I. Partitions de l'identité

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

Soient k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E . On dit qu'ils constituent une *partition de l'identité* de E lorsque $u_1 + u_2 + \dots + u_k = \text{id}_E$.

1. *Exemple 1.* Dans cette question, $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et f est l'endomorphisme

de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- a) Préciser le spectre de A et montrer que A n'est pas diagonalisable.
 - b) Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$, défini par $Q(X) = X^3 + X^2$, est un polynôme annulateur de A .
 - c) Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré 2?
 - d) Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels les endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbb{R}^3$.
2. *Exemple 2.* Dans cette question, f est un endomorphisme diagonalisable de E possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $L_i(X) = \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre associé à λ_i , et $v_i = L_i(f)$.
 - a) Justifier l'égalité $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f .
 - b) Établir, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'inclusion $\text{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

- c) Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, calculer $\sum_{i=1}^k L_i(\lambda_j)$. En déduire que $v_1, \dots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E .
- d) Établir, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'égalité $\text{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme v_i .
3. Soient $u_1, \dots, u_k$ des endomorphismes de E constituant une partition de l'identité. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note r_i le rang de u_i .
- a) Établir les relations $E = \sum_{i=1}^k \text{Im}(u_i)$ et $n \leq \sum_{i=1}^k r_i$.
- b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(u_1), \dots, \text{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si $n = \sum_{i=1}^k r_i$.
- c) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
- (1) $n = \sum_{i=1}^k r_i$;
 - (2) les endomorphismes $u_1, \dots, u_k$ sont des projecteurs ;
 - (3) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (i) En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication $(2) \Rightarrow (1)$.
- (ii) À l'aide de la question 3.b) et en écrivant, pour $x \in E$, les vecteurs $u_1(x), \dots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication $(1) \Rightarrow (3)$.
- (iii) Conclure en établissant une troisième implication.

2 Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; Python.

4. a) Soient p un endomorphisme de E et P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.
- b) Soient f un endomorphisme de E et M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Établir l'existence d'un réel α et d'un projecteur orthogonal p tels que $f = \alpha p$, si et seulement si

$$\text{tr}(M)M^2 = \text{tr}(M^2)M \quad \text{et} \quad {}^tM = M,$$

où $\text{tr}(M)$ et $\text{tr}(M^2)$ désignent les traces respectives de M et M^2 .

5. a) Écrire en Python une fonction `trace(A)` qui calcule la trace d'une matrice carrée A .
- b) La fonction Python suivante permet de tester si une matrice carrée A de taille n donnée est symétrique.

```
def est_symetrique(A):
    n = len(A)
    for i in range(n - 1):
        for j in range(i + 1, n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return False
    return True
```

Préciser la signification de l'instruction `A[i][j] != A[j][i]` et donner un exemple d'utilisation de la fonction `est_symetrique`, en indiquant les valeurs d'entrée et la valeur de sortie obtenue.

- c) La fonction Python suivante, dont une instruction est incomplète, permet de tester si, pour une matrice carrée M de taille n , il existe un réel α et un projecteur orthogonal p tels que M soit la matrice de l'endomorphisme αp dans une base orthonormale. Cette fonction utilise les deux fonctions précédentes et s'appuie sur la condition nécessaire et suffisante de la question 4.b).

```
def est_multiple_projecteur(M):
    n = len(M)
    A = trace(M) * produit(M, M)
    B = trace(produit(M, M)) * M
    b = est_symetrique(M)
    if b:
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                # instruction a completer
                b = ...
    return b
```

Compléter l'instruction manquante et donner les valeurs de sortie obtenues par application de cette fonction aux deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les définitions et notations suivantes concernent les questions 6 à 9. Pour tout vecteur $x \in E$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{F} = (s_1, \dots, s_k)$ une famille de k vecteurs de E , et F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. On note S la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $S_1, \dots, S_k$, et l'on rappelle que p_F est le projecteur orthogonal d'image F .

6. a) Montrer que les deux matrices S et tSS ont le même rang.
- b) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F$ si et seulement s'il existe une matrice $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ telle que $Y = SZ$.
- c) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F^\perp$ si et seulement si la matrice colonne tSY est nulle.
- d) Soient $x \in E$ et $y = p_F(x)$. Établir l'existence d'une matrice $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ telle que $Y = SZ$ et ${}^tSX = {}^tSSZ$.
- e) En déduire l'expression de la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de S lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.
7. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On appelle *inverse de Penrose–Moore* de M toute matrice N de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ vérifiant

$$MNM = M, \quad NMN = N, \quad {}^t(MN) = MN, \quad {}^t(NM) = NM.$$

- a) Établir l'existence d'une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et de réels $\rho_1, \dots, \rho_k$ vérifiant $M = Q \operatorname{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k) {}^tQ$.
- b) On note $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $h(t) = 1/t$ si $t \neq 0$ et $h(0) = 0$, et $M^{(-)} = Q \operatorname{Diag}(h(\rho_1), \dots, h(\rho_k)) {}^tQ$. Montrer que $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose–Moore de M .
- c) Soit N une inverse de Penrose–Moore de M .
 - (i) Justifier les égalités $N = M {}^tNN$ et $M {}^2N = M$.
 - (ii) Soit $U \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On suppose que $M {}^2U$ est nulle. Montrer que MU est nulle.
 - (iii) Posant $U = N - M^{(-)}$, justifier que $M^{(-)}$ est l'unique inverse de Penrose–Moore de M .

8. On note $({}^tSS)^{(-)}$ l'unique inverse de Penrose–Moore de la matrice tSS et l'on pose $P = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS$.
- Montrer que les matrices P et S ont le même rang.
 - Justifier que P est la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ et que son expression généralise la formule trouvée à la question 6.e) lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.
9. *Exemple.* On suppose que $k = 2$, $s_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $s_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $s_1 \neq 0_E$ et tSS non inversible.
- Établir l'existence d'un réel θ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\beta_i = \theta\alpha_i$.
 - Déterminer une matrice carrée Q pour laquelle la matrice ${}^tQ{}^tSSQ$ est diagonale.
 - En déduire l'inverse de Penrose–Moore de tSS .
 - Soit $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ un vecteur de E . Calculer $p_F(x)$.

3 Partie III. Application probabiliste

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; estimations.

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^n$ et toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout entier $d \geq 1$, on dit qu'une variable aléatoire C suit la loi du khi-deux de paramètre d , notée $\chi^2(d)$, lorsque $C/2$ suit la loi $\gamma(d/2)$. On appelle *variable gaussienne* toute variable aléatoire X qui suit une loi normale ou qui est certaine ; sa loi est notée $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, où μ est son espérance et σ son écart-type. Ainsi, X suit $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$ lorsque $\sigma > 0$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ou lorsque $\sigma = 0$ et $\mathbb{P}(X = \mu) = 1$.

10. Soient $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.
- Si $G_1, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n a_i G_i$ est une variable gaussienne centrée, alors on dit que le vecteur aléatoire $(G_1, \dots, G_n)$ est un *vecteur gaussien* et l'on note G la matrice colonne de ses composantes $G_1, \dots, G_n$.
11. Soient $(G_1, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(H_1, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire dont la matrice colonne H vérifie $H = MG$.
- Montrer que $(H_1, \dots, H_n)$ est un vecteur gaussien.
 - Justifier que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la variable aléatoire $G_i G_j$ admet une espérance, notée $\mathbb{E}(G_i G_j)$. On note alors $\Lambda(G) = (\mathbb{E}(G_i G_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et l'on admet dans la suite que la loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par la matrice $\Lambda(G)$.
12. On suppose que $G_1, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Montrer que $(G_1, \dots, G_n)$ est un vecteur gaussien. Déterminer $\Lambda(G)$.
 - Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(H_1, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que $H = QG$. Montrer que les variables aléatoires $H_1, \dots, H_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

13. Soit $(G_1, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien dont les composantes sont mutuellement indépendantes et de variance égale à 1. Soient $P_1, \dots, P_k$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rangs respectifs $r_1, \dots, r_k$. On suppose que $\sum_{i=1}^k P_i = I_n$ et $\sum_{i=1}^k r_i = n$.
- Justifier que $P_1, \dots, P_k$ sont des matrices de projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique, dont les images sont deux à deux orthogonales.
 - En déduire l'existence d'une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle chacune des matrices $QP_1^t Q, \dots, QP_k^t Q$ est diagonale.
 - On suppose que $r_1 \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire ${}^t G P_1 G$ suit la loi $\chi^2(r_1)$.
 - Montrer que les variables aléatoires ${}^t G P_1 G, {}^t G P_2 G, \dots, {}^t G P_k G$ sont mutuellement indépendantes.
14. Soient q et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(X_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq m}}$ une famille de $q \times m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{qm} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m X_{i,j} \quad \text{et} \quad Z_j = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q X_{i,j} \quad (j \in \llbracket 1, m \rrbracket).$$

- Déterminer les lois respectives de $\bar{X}$ et $\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - \bar{X})^2$, et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.
- Déterminer les lois respectives de $\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - Z_j)^2$ et $q \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{X})^2$, et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.