

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Simulation d'une variable aléatoire à densité

Partie I – La loi de $\tan^2(V)$ et la méthode d'inversion

$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1+x)}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; $G_X(U)$ a la même loi que X .

Corrigé – Partie I.

1. Une densité.

- a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$; en 0, elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et en $+\infty$ à $\frac{1}{x^{3/2}}$: par comparaison aux intégrales de Riemann $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$, convergentes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \text{ converge.}$$

- b) $\tan$ est une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$ et pour $x \geq 0$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\tan V \leq \sqrt{x}) = \mathbb{P}(V \leq \text{Arctan} \sqrt{x}) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan} \sqrt{x}.$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$X \text{ est à densité, } F_X(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(\sqrt{x}) \text{ pour } x \geq 0.$$

- c) En dérivant pour $x > 0$: $F'_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} = f(x)$, et $F'_X(x) = 0$ pour $x < 0$.
Donc f est une densité de X :

$$f \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. Simulation.

- a) $\frac{\pi}{2} u[i, 0]$ simule la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et l'on applique $t \mapsto \tan^2 t$:

def simulX(N):

 u = rd.random((N, 1))

 x = np.ones((N, 1))

 for i in range(N):

 x[i, 0] = np.tan(np.pi / 2 * u[i, 0])**2

 return x

- b) y compte le nombre de simulations supérieures à 1 parmi N simulations indépendantes de X ; c'est une simulation d'une variable de loi binomiale de paramètres N et $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(1) = \frac{1}{2}$. q est la fréquence correspondante ; par la loi faible des grands nombres, elle est proche de $\mathbb{P}(X > 1)$ pour N grand.

$$y \text{ simule } \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right), \quad q \simeq \frac{1}{2}.$$

3. Méthode d'inversion.

- a) F_X est continue, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Comme $p > 0$, il existe x avec $F_X(x) < p : J_p \neq \emptyset$. Par le théorème des valeurs intermédiaires ($0 < p < 1$), $K_p \neq \emptyset$. Si $a \in J_p$, $b \in K_p$ et $a \geq b$, la croissance donne $F_X(a) \geq F_X(b) = p$: absurde.

$$J_p \neq \emptyset, K_p \neq \emptyset, \quad a \in J_p, b \in K_p \Rightarrow a < b.$$

- b) K_p est non vide et minoré (par tout élément de J_p) : $G_X(p) = \inf K_p$ existe. Il existe une suite (b_n) d'éléments de K_p de limite $G_X(p)$; par continuité de F_X , $p = F_X(b_n) \rightarrow F_X(G_X(p))$.

$$G_X(p) \text{ existe et } F_X(G_X(p)) = p.$$

- c) Si $x < G_X(p)$, alors $F_X(x) \leq F_X(G_X(p)) = p$, et $F_X(x) \neq p$ (sinon $x \in K_p$ et $x < \inf K_p$). Réciproquement, si $F_X(x) < p$, $x \in J_p$ et $G_X(p) \in K_p$, donc $x < G_X(p)$ par a).

$$x < G_X(p) \iff F_X(x) < p.$$

- d) Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après c), $[G_X(U) \leq x] = [\overline{F_X(x) < U}] = [U \leq F_X(x)]$ (c'est un événement), donc, puisque $F_X(x) \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(G_X(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

$$G_X(U) \text{ suit la même loi que } X.$$

- e) Pour $p \in]0, 1[$, F_X est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc K_p est réduit au point x tel que $\frac{2}{\pi} \text{Arctan} \sqrt{x} = p$, soit $\sqrt{x} = \tan \frac{\pi p}{2}$.

$$\forall p \in]0, 1[, \quad G_X(p) = \tan^2\left(\frac{\pi p}{2}\right).$$

Partie II – Fonction de répartition conjointe de deux variables uniformes

Partie II – Propriétés de $F_{(X,Y)}$ et encadrement de C

$$C_- \leq C \leq C_+ ; \text{ cas d'égalité.}$$

Corrigé – Partie II.

4. Propriétés de F .

- a) Si $y \leq y'$, $[X \leq x] \cap [Y \leq y] \subset [X \leq x] \cap [Y \leq y']$:

$$y \mapsto F(x, y) \text{ est croissante.}$$

- b) L'inclusion $\supset$ est claire. Si $\omega \in [X \leq x]$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $Y(\omega) \leq n$.

$$[X \leq x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]).$$

- c) La suite d'événements de b) est croissante ; par le théorème de la limite monotone, $F(x, n) \rightarrow \mathbb{P}([X \leq x])$. Comme $y \mapsto F(x, y)$ est croissante et majorée, elle admet une limite en $+\infty$, égale à la limite de la suite $(F(x, n))$.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \mathbb{P}([X \leq x]).$$

- d) De même, $\bigcap_n [X \leq x] \cap [Y \leq -n] = \emptyset$ (suite décroissante) :

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

- e) (i) $[X \leq a'] \cap B$ est la réunion disjointe de $[X \leq a] \cap B$ et $A \cap B$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}([X \leq a'] \cap B) - \mathbb{P}([X \leq a] \cap B).$$

- (ii) De même, pour $c \in \{a, a'\}$, $[X \leq c] \cap [Y \leq b']$ est la réunion disjointe de $[X \leq c] \cap [Y \leq b]$ et $[X \leq c] \cap B$, donc $\mathbb{P}([X \leq c] \cap B) = F(c, b') - F(c, b)$. Avec (i) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b).$$

5. Encadrement de C .

- a)

$$[U > u] \cup [V > v] = [U \leq u] \cap [V \leq v] \subset [U \leq u].$$

- b) D'après a), $C(u, v) \leq \mathbb{P}(U \leq u) = u$ et

$$C(u, v) = 1 - \mathbb{P}([U > u] \cup [V > v]) \geq 1 - \mathbb{P}(U > u) - \mathbb{P}(V > v) = 1 - (1 - u) - (1 - v).$$

$$u + v - 1 \leq C(u, v) \leq u.$$

- c) Par symétrie des rôles, $C(u, v) \leq v$, et $C(u, v) \geq 0$:

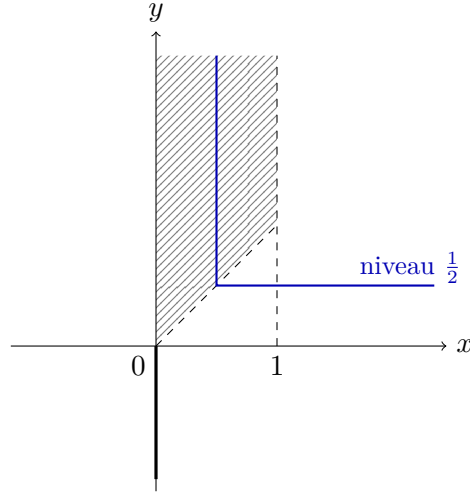
$$C_-(u, v) \leq C(u, v) \leq C_+(u, v).$$

6. Les cas d'égalité.

- a) $[U \leq x] \cap [U \leq y] = [U \leq \min(x, y)]$:

$$F_{(U, U)}(x, y) = F_U(\min(x, y)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \min(x, y) < 0, \\ \min(x, y) & \text{si } 0 \leq \min(x, y) \leq 1, \\ 1 & \text{si } \min(x, y) > 1. \end{cases}$$

- b) Pour $c \in]0, 1[$, la ligne de niveau c est $\{(x, y); \min(x, y) = c\}$, réunion des demi-droites $\{c\} \times [c, +\infty[$ et $[c, +\infty[\times \{c\}$ (tracée ici pour $c = \frac{1}{2}$). L'ensemble $\{F_{(U,U)}(x, y) = x\}$ est $\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y \geq x\} \cup \{(0, y); y < 0\}$ (hachuré, avec la demi-droite en trait épais).



- c) ($\Leftarrow$) Si $U = V$ presque sûrement, $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq \min(u, v)) = \min(u, v)$. ($\Rightarrow$) Si $C = C_+$, pour $r \in [0, 1]$, $\mathbb{P}([U \leq r] \cap [V > r]) = \mathbb{P}(U \leq r) - C(r, r) = r - r = 0$. Si $U(\omega) < V(\omega)$ (avec $U, V \in [0, 1]$), il existe un rationnel $r \in [0, 1]$ tel que $U(\omega) \leq r < V(\omega)$; par sous-additivité (réunion dénombrable), $\mathbb{P}(U < V) = 0$. De même $\mathbb{P}(V < U) = 0$.

$$C = C_+ \iff U = V \text{ presque sûrement.}$$

- d) $[U \leq x] \cap [1 - U \leq y] = [1 - y \leq U \leq x]$, donc

$$F_{(U, 1-U)}(x, y) = \max(0, \min(x, 1) - \max(1 - y, 0)),$$

qui vaut $C_-(x, y)$ sur $[0, 1]^2$. $1 - U$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Si $V = 1 - U$ presque sûrement, $C = C_-$. Réciproquement, si $C = C_-$: pour $r \in [0, 1]$, $C(r, 1 - r) = 0$ et $\mathbb{P}([U > r] \cap [V > 1 - r]) = 1 - r - (1 - (1 - r)) + C(r, 1 - r) = 0$. Si $U(\omega) + V(\omega) < 1$, il existe un rationnel $r \in [0, 1]$ tel que $U(\omega) \leq r < 1 - V(\omega)$, donc $\omega \in [U \leq r] \cap [V \leq 1 - r]$, de probabilité $C(r, 1 - r) = 0$; si $U(\omega) + V(\omega) > 1$, il existe un rationnel $r \in [0, 1]$ tel que $1 - V(\omega) < r < U(\omega)$, donc $\omega \in [U > r] \cap [V > 1 - r]$. Par sous-additivité (réunions dénombrables), $\mathbb{P}(U + V \neq 1) = 0$.

$$C = C_- \iff V = 1 - U \text{ presque sûrement.}$$

Partie III – Copules

Partie III – Copules et dérivée croisée

Une fonction φ régulière telle que $\partial_{1,2}^2 \varphi \geq 0$ et vérifiant les conditions au bord est une copule.

Corrigé – Partie III.

7. Exemples.

- a) $C(u, 0) = \mathbb{P}([U \leq u] \cap [V \leq 0]) \leq \mathbb{P}(V \leq 0) = 0$, et de même $C(0, u) = 0$. $\mathbb{P}(V \leq 1) = 1$ donne $C(u, 1) = \mathbb{P}(U \leq u) = u$, de même $C(1, u) = u$. Enfin, pour $u \leq u', v \leq v'$, d'après 4.e), $C(u', v') - C(u', v) - C(u, v') + C(u, v) = \mathbb{P}([u < U \leq u'] \cap [v < V \leq v']) \geq 0$.

C est une copule.

- b) D'après 6.a) et 6.d), C_+ et C_- sont les copules associées aux couples (U, U) et $(U, 1 - U)$. Si U et V sont indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u) \mathbb{P}(V \leq v) = uv$: Π est la copule associée.

C_+ , C_- et Π sont des copules.

8. Dérivée croisée d'une copule à densité.

- a) On écrit

$$G(h, k) = \frac{1}{h} \left(\frac{\Phi(a+h, b+k) - \Phi(a+h, b)}{k} - \frac{\Phi(a, b+k) - \Phi(a, b)}{k} \right).$$

Φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$, les taux d'accroissement tendent vers les dérivées partielles par rapport à la seconde variable :

$$\lim_{k \rightarrow 0} G(h, k) = H(h) = \frac{\partial_2 \Phi(a+h, b) - \partial_2 \Phi(a, b)}{h}.$$

- b) $x \mapsto \partial_2 \Phi(x, b)$ est dérivable en a , de dérivée $\partial_{1,2}^2 \Phi(a, b)$; donc $H(h) \rightarrow \partial_{1,2}^2 \Phi(a, b)$. Pour $h > 0$ et $k > 0$, $G(h, k) \geq 0$ par la troisième propriété des copules ($u = a \leq u' = a+h$, $v = b \leq v' = b+k$) ; en passant à la limite, $H(h) \geq 0$ pour $h > 0$, puis

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(h) = \partial_{1,2}^2 \Phi(a, b) \geq 0.$$

9. Une condition suffisante.

- a) Pour $y \in]0, 1[$ fixé, $x \mapsto \partial_2 \varphi(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, de dérivée $\partial_{1,2}^2 \varphi(x, y)$, donc $\int_u^{u'} \partial_{1,2}^2 \varphi(x, y) dx = \partial_2 \varphi(u', y) - \partial_2 \varphi(u, y)$, qui est la dérivée de $y \mapsto \varphi(u', y) - \varphi(u, y)$. En intégrant entre v et v' :

$$\Psi(u, u', v, v') = \int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial_{1,2}^2 \varphi(x, y) dx \right) dy.$$

b) $u_n \geq \frac{1}{3n} > 0$; $u'_n - u_n = \frac{1}{3n} + (1 - \frac{1}{n})(u' - u) > 0$; $u'_n \leq \frac{2}{3n} + 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{3n} < 1$.

$$0 < u_n < u'_n < 1.$$

c) Soit $(u, u', v, v') \in T$ et u_n, u'_n, v_n, v'_n construits comme en b) (à partir de (u, u') et de (v, v')). Alors $(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \in T_0$, donc $\Psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \geq 0$. Ces suites convergent vers u, u', v, v' et Ψ est continue sur $[0, 1]^4$ (φ continue sur $[0, 1]^2$) ; par passage à la limite :

$$\Psi \geq 0 \text{ sur } T.$$

d) Si $\partial_{1,2}^2 \varphi \geq 0$ sur $]0, 1[^2$, alors pour $(u, u', v, v') \in T_0$, l'intégrale de a) est positive (bornes dans l'ordre croissant), donc $\Psi \geq 0$ sur T_0 , puis sur T par c) : c'est la troisième propriété des copules. Avec les deux premières :

$$\varphi \text{ est une copule.}$$

Partie IV – Familles de copules et simulation

Partie IV – Exemples de copules et simulation

M_θ copule si et seulement si $\theta \in [-1, 1]$; mélange de copules ; simulation de (X, Y) .

Corrigé – Partie IV.

10. La famille M_θ .

a) S est continue sur le fermé borné $[0, 1]^2$: par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum. Pour $(u, v) \in [0, 1]^2$, $S(u, v) = u(1 - v) + v(1 - u) \geq 0$, avec $S(0, 0) = 0$; et $1 - S(u, v) = (1 - u)(1 - v) + uv \geq 0$, avec $S(1, 0) = 1$.

$$c = \min_{[0,1]^2} S = 0, \quad d = \max_{[0,1]^2} S = 1.$$

b) M est polynomiale, donc continue sur $[0, 1]^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$. $M(u, 0) = M(0, u) = 0$, $M(u, 1) = u(u + 1 - u) = u = M(1, u)$. Enfin $M = u^2v + uv^2 - u^2v^2$, $\partial_2 M = u^2 + 2uv - 2u^2v$ et $\partial_{1,2}^2 M = 2u + 2v - 4uv = 2S(u, v) \geq 0$. Par 9.d) :

$$M \text{ est une copule à densité, avec } \partial_{1,2}^2 M = 2S.$$

c) M_θ vérifie les deux premières propriétés pour tout θ (combinaison de fonctions qui les vérifient, de coefficients de somme 1), et $\partial_{1,2}^2 M_\theta = (1 - \theta) + 2\theta S$. Si M_θ est une copule, c'est une copule à densité et 8.b) impose $(1 - \theta) + 2\theta s \geq 0$ pour tout $s \in S([0, 1]^2)$; or $S(t, t) = 2t(1 - t) \rightarrow 0$ et $S(t, 1 - t) = 1 - 2t(1 - t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$, donc par continuité $1 - \theta \geq 0$ et $1 + \theta \geq 0$. Réciproquement, si $\theta \in [-1, 1]$, la fonction affine $s \mapsto 1 - \theta + 2\theta s$ est positive en 0 et en 1, donc sur $[0, 1]$, et 9.d) conclut.

$$M_\theta \text{ est une copule} \iff \theta \in [-1, 1].$$

11. Mélange.

- a) Pour $u \in \mathbb{R}$, $[U_N \leq u] = ([N = 0] \cap [U_0 \leq u]) \cup ([N = 1] \cap [U_1 \leq u])$ est un événement : U_N est une variable aléatoire. Par indépendance (faire tendre v_0, v_1, u_{1-i} vers $+\infty$ dans l'hypothèse),

$$\mathbb{P}(U_N \leq u) = (1 - p)\mathbb{P}(U_0 \leq u) + p\mathbb{P}(U_1 \leq u) = \mathbb{P}(U_0 \leq u),$$

fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. De même pour V_N .

$$\boxed{U_N \text{ et } V_N \text{ suivent la loi uniforme sur } [0, 1].}$$

- b) Notons C_0, C_1 les copules de (U_0, V_0) et (U_1, V_1) . Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([N = 0], [N = 1])$ et l'indépendance :

$$\boxed{C_{(U_N, V_N)}(u, v) = (1 - p) C_0(u, v) + p C_1(u, v).}$$

12. La copule C_p .

- a) $C_p = p\Pi + (1 - p)C_+$. Les deux premières propriétés sont vérifiées par Π et C_+ , donc par C_p (coefficients de somme 1), et la troisième est conservée par combinaison à coefficients positifs.

$$\boxed{C_p \text{ est une copule.}}$$

- b) D'après 11.b), on tire N de loi de Bernoulli de paramètre p : si $N = 1$, on prend (U, V) indépendantes uniformes (copule Π) ; si $N = 0$, on prend $V = U$ uniforme (copule C_+).

def simulC(p):

```

    u = rd.random()
    if rd.random() < p:
        v = rd.random()
    else:
        v = u
    return u, v

```

13. Copule d'un couple à densité.

Posons $U' = F_X(X)$ et $V' = F_Y(Y)$. Pour $u \in]0, 1[$, $[X \leq G_X(u)] \subset [F_X(X) \leq u]$ (croissance et 3.b). Réciproquement, si $F_X(X) \leq u$ et $X > G_X(u)$, alors $F_X(X) = u$ et $X \in]G_X(u), \beta_u]$ où $\beta_u = \max K_u$ ($K_u = F_X^{-1}(\{u\})$ est un intervalle fermé borné), événement de probabilité $F_X(\beta_u) - F_X(G_X(u)) = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(U' \leq u) = \mathbb{P}(X \leq G_X(u)) = u : U'$ (et de même V') suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, et pour $(u, v) \in]0, 1[^2$,

$$F_{(U', V')}(u, v) = \mathbb{P}([X \leq G_X(u)] \cap [Y \leq G_Y(v)]) = F_{(X, Y)}(G_X(u), G_Y(v)) = C(u, v).$$

Sur le bord, la copule de (U', V') vaut 0 si $uv = 0$, u si $v = 1$, v si $u = 1$ (7.a). Donc C est la copule associée à (U', V') , et par 7.a) :

$$\boxed{C \text{ est une copule.}}$$

Inversement, si (U, V) a pour copule C , alors, comme en 3.d), $[G_X(U) \leq x] = [U \leq F_X(x)]$ et

$$\mathbb{P}([G_X(U) \leq x] \cap [G_Y(V) \leq y]) = C(F_X(x), F_Y(y)) = F_{(X, Y)}(x, y)$$

(on a $G_X(F_X(x)) \leq x$ et F_X est constante entre ces deux réels, de sorte que la différence est un événement négligeable ; les cas $F_X(x) \in \{0, 1\}$ se traitent directement).

$$\boxed{\text{Si } (u, v) \text{ simule } (U, V), \text{ alors } (G_X(u), G_Y(v)) \text{ simule } (X, Y).}$$