

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – L'intégrale $I = \int_0^1 t^t dt$

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln t)^n dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ et } I = \sum_{n \geq 0} u_n.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Étude de f et g .

- a) Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$; par continuité de l'exponentielle, $g(x) = e^{f(x)} \rightarrow e^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1.$$

- b) $f'(x) = \ln x + 1$, qui s'annule en $\frac{1}{e}$, est négative sur $]0, \frac{1}{e}]$ et positive sur $[\frac{1}{e}, 1]$; $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, $f(1) = 0$. Comme $g = \exp \circ f$ avec $\exp$ strictement croissante, g a les mêmes variations, avec $g(\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$, $g(1) = 1$.

x	0	$\frac{1}{e}$	1
$f'(x)$		– 0 +	
f	0	$-\frac{1}{e}$	0
g	1	$e^{-1/e}$	1

- c) g est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0 (limite 1) : l'intégrale est faussement impropre en 0.

$$\int_0^1 g(t) dt \text{ converge.}$$

2. La suite (u_n) .

- a) $t \mapsto (t \ln t)^n$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0 (égale à 0 si $n \geq 1$, à 1 si $n = 0$) : l'intégrale est faussement impropre.

$$u_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) D'après 1.b), $|t \ln t| \leq \frac{1}{e}$ sur $]0, 1]$, donc $|u_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-n} dt = \frac{1}{e^{n+1} n!} \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

c) $u_0 = \int_0^1 1 dt = 1$. Pour u_1 , on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ ($\varepsilon \in]0, 1[$) avec $a(t) = \ln t$ et $b(t) = \frac{t^2}{2}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a'(t) = \frac{1}{t}$, $b'(t) = t$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{4} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{4}.$$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{1}{4}.$$

d) Pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, posons $J_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt$ (convergente comme en a)). Sur $[\varepsilon, 1]$, avec $a(t) = (\ln t)^q$, $b(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a'(t) = \frac{q}{t} (\ln t)^{q-1}$, $b'(t) = t^p$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q dt = \left[\frac{t^{p+1} (\ln t)^q}{p+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{q}{p+1} \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt.$$

Le crochet vaut $-\frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $J_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p,q-1}$.

Par récurrence immédiate, $J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} J_{n,0}$ avec $J_{n,0} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $u_n = \frac{1}{n!} J_{n,n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

e) $|u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente : la série converge absolument.

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

f) On additionne les u_k pour k de 0 à n :

def somme(n) :

S = 0

for k in range(n+1) :

S = S + (-1)**k / (k+1)**(k+1)

return S

3. Calcul de I .

a) L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et, pour $x \in [-\frac{1}{e}, 0]$, $|\exp^{(n+1)}| = \exp \leq 1$ sur $[x, 0]$. L'inégalité de Taylor–Lagrange entre 0 et x donne

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1 \leq \frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1} (n+1)!}.$$

b) Par linéarité des intégrales convergentes, $S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(t \ln t)^k}{k!} dt$. Pour $t \in]0, 1]$, $x = t \ln t \in [-\frac{1}{e}, 0]$, donc a) donne

$$|I - S_n| \leq \int_0^1 \left| e^{t \ln t} - \sum_{k=0}^n \frac{(t \ln t)^k}{k!} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{e^{n+1} (n+1)!},$$

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1} (n+1)!}.$$

- c) Le majorant tend vers 0, donc $S_n \rightarrow I$ et $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m}$ (avec $m = n + 1$).

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

- d) D'après b), il suffit de calculer S_n pour le premier n tel que $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leq \varepsilon$. On met à jour simultanément la somme et le majorant (passer de $n - 1$ à n revient à multiplier le majorant par $\frac{1}{e(n+1)}$) :

```
def estimation(eps):
    n = 0
    S = 1
    majorant = 1 / np.e
    while majorant > eps:
        n = n + 1
        S = S + (-1)**n / (n+1)**(n+1)
        majorant = majorant / (np.e * (n+1))
    return S
```

Exercice 2

Exercice 2 – Forme quadratique et inégalité de Kantorovich

J matrice de 1, $f(x) = \sum_{i < j} x_i x_j$, $\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle \geq 1$.

Corrigé – Exercice 2.

1. La matrice J .

- a) J est symétrique réelle : d'après le théorème spectral, il existe P orthogonale ($P^{-1} = {}^t P$) et D diagonale telles que

$$J = P D {}^t P.$$

- b) Toutes les colonnes de J sont égales et non nulles :

$$\text{rg } J = 1.$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } J = n - 1 \geq 1$:

$$0 \text{ est valeur propre de } J \text{ et } \dim E_0(J) = n - 1.$$

- c) D est semblable à J et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de J ; comme $\dim E_0(J) = n - 1$, exactement $n - 1$ d'entre eux sont nuls. Notons λ le dernier : $\lambda = \text{Tr } D = \text{Tr}(P D {}^t P) = \text{Tr } J = n$. Quitte à permuter les colonnes de P :

$$D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0).$$

2. La forme quadratique f .

a) En développant, $(\sum_i x_i)^2 = \sum_k x_k^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right].$$

b) Soit M la matrice de coefficients diagonaux nuls et de coefficients non diagonaux égaux à $\frac{1}{2}$. Alors ${}^t X M X = \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} x_i x_j = \sum_{i < j} x_i x_j$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$M = \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} I.$$

d) Comme $P^t P = I$, $M = P(\frac{1}{2} D - \frac{1}{2} I)^t P$:

$$\Delta = \text{diag}\left(\frac{n-1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right).$$

e) $\mathcal{S}$ est fermé et borné, f est continue (polynomiale) : par le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{S}$. Posons $Y = {}^t P X$: $\|Y\| = \|X\|$ (P orthogonale), et $f(x) = {}^t Y \Delta Y = \frac{n-1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} y_k^2$. Pour $\|X\| = 1$: $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n-1}{2}$. Ces bornes sont atteintes : $f(\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)) = \frac{1}{2}(n-1)$ (avec a) et $f(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)) = -\frac{1}{2}$.

$$\min_{\mathcal{S}} f = -\frac{1}{2}, \quad \max_{\mathcal{S}} f = \frac{n-1}{2}.$$

3. Une inégalité.

a) A est symétrique réelle : par le théorème spectral, $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t Q$ avec Q orthogonale et $\lambda_i > 0$. Posons $B = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^t Q$: $B^2 = Q \text{diag}(\lambda_i)^t Q = A$.

$$A \text{ est diagonalisable et } B = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})^t Q \text{ vérifie } B^2 = A.$$

De plus B est symétrique et inversible (valeurs propres $\sqrt{\lambda_i} > 0$), de même que A : u et v sont bijectifs.

b) Comme B est symétrique, $\langle v(x), v^{-1}(y) \rangle = {}^t X {}^t B B^{-1} Y = {}^t X Y = \langle x, y \rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|v(x)\|^2 \|v^{-1}(y)\|^2,$$

avec

$$\|v(x)\|^2 = {}^t X {}^t B B X = {}^t X A X = \langle u(x), x \rangle,$$

$$\|v^{-1}(y)\|^2 = {}^t Y B^{-2} Y = \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

Si $y = u(x)$ ($\neq 0$ car u est injectif), $v^{-1}(y) = v(x)$: les deux vecteurs sont colinéaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité.

$$y = u(x) \text{ convient.}$$

- c) Pour $\|x\| = 1$, b) avec $y = x$ donne $1 = \langle x, x \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$. Si x est un vecteur propre unitaire de u associé à λ , alors $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ et le produit vaut $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$: la borne inférieure est atteinte.

$$\inf_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle = 1.$$

4. Application.

- a) On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I_2$:

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) λ est valeur propre si et seulement si le système $(1 - \lambda)x + y = 0$, $x + (2 - \lambda)y = 0$ a une solution non nulle. La première équation donne $y = (\lambda - 1)x$ (et $x \neq 0$), puis $x(1 + (2 - \lambda)(\lambda - 1)) = 0$, soit $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$.

$$\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

- c) A est symétrique à valeurs propres strictement positives et, pour $x = (x_1, x_2)$:

$$\langle u(x), x \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2, \quad \langle u^{-1}(x), x \rangle = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$

donc $g(x) = \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$. D'après 3.c), sur le cercle unité, $g \geq 1$ avec égalité en un vecteur propre unitaire de A .

$$\min_{x_1^2 + x_2^2 = 1} g(x_1, x_2) = 1.$$

Problème

Problème – Parties A et B – Loi de Z_a et loi de X_n

$g_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)}$ sur $\mathbb{R}_+$; X_n : rang de la première collision.

Corrigé – Problème.**Partie A****1. Densité.**

g_a est positive, continue sur $\mathbb{R}$ (en 0 les deux expressions valent 0). Pour $A > 0$, $\int_0^A g_a = [-e^{-x^2/(2a^2)}]_0^A = 1 - e^{-A^2/(2a^2)} \rightarrow 1$, et g_a est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

g_a est une densité de probabilité.

2. Moments de Z_a .

a)

$$f_N(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad \mathbb{E}(N) = 0, \quad \mathbb{E}(N^2) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{E}(N)^2 = a^2.$$

b) $x g_a(x) = \frac{x^2}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)}$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme N admet un moment d'ordre 2, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_N(x) dx$ converge et vaut a^2 ; la fonction intégrée étant paire, $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2a^2)} dx = \frac{1}{2} a \sqrt{2\pi} a^2$. Ainsi Z_a admet une espérance et

$$\mathbb{E}(Z_a) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2\pi}}{2}, \quad \boxed{\mathbb{E}(Z_a) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

c) Pour $A > 0$, on intègre par parties sur $[0, A]$ avec $p(x) = x^2$ et $q(x) = -e^{-x^2/(2a^2)}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $p'(x) = 2x$, $q'(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)}$:

$$\int_0^A x^2 g_a(x) dx = \left[-x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right]_0^A + 2a^2 \int_0^A g_a(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2a^2$$

(croissances comparées et question 1). Donc $\mathbb{E}(Z_a^2) = 2a^2$ et, par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_a) = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{(4 - \pi)a^2}{2}.$$

Partie B**1. Simulation.**

On dépose la boule courante dans l'urne **choix** tant que l'urne choisie pour la boule suivante est vide ; on s'arrête dès que la nouvelle boule tombe dans une urne déjà occupée, et X est alors son rang.

```
def tirage(n):
    urnes = np.zeros(n)
    X = 1
    choix = rd.randint(0, n)
    while urnes[choix] == 0:
        urnes[choix] = urnes[choix] + 1
        choix = rd.randint(0, n)
        X = X + 1
    return X
```

2. Cas $n = 1$.

La deuxième boule tombe toujours dans l'unique urne, qui contient déjà la première.

$$X_1 = 2 \text{ (variable certaine),} \quad \mathbb{E}(X_1) = 2, \quad \mathbb{V}(X_1) = 0.$$

3. Cas $n = 2$.

$X_2 \in \{2, 3\}$: $[X_2 = 2]$ est réalisé si et seulement si la deuxième boule est dans l'urne de la première, de probabilité $\frac{1}{2}$; sinon les deux urnes sont occupées et la troisième boule crée une collision.

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(X_2) = \frac{5}{2}, \quad \mathbb{V}(X_2) = \frac{4+9}{2} - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}.$$

4. Cas général.

- a) La première boule ne peut pas créer de collision ; après $n + 1$ boules, deux d'entre elles sont dans la même urne (il n'y a que n urnes). Inversement, chaque valeur $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ est atteinte (les $k - 1$ premières boules dans des urnes distinctes, la k -ième dans l'urne de la première).

$$X_n(\Omega) = \llbracket 2, n + 1 \rrbracket.$$

- b) Les choix d'urnes des k premières boules forment un k -uplet uniforme parmi les n^k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket^k$. $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si les $k - 1$ premiers choix sont deux à deux distincts ($n(n - 1) \cdots (n - k + 2) = \frac{n!}{(n - k + 1)!}$ possibilités) et le k -ième est l'un de ces $k - 1$ choix ($k - 1$ possibilités).

$$\forall k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n! (k - 1)}{n^k (n - k + 1)!}.$$

- c) X_n est une variable aléatoire finie :

$$X_n \text{ admet une espérance.}$$

- d) $\mathbb{E}(X_n) = n! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k (n-k+1)!}$. **facto** contient $n!$; au rang k , **fac** doit valoir $(n - k + 1)!$, obtenu en divisant la valeur précédente $(n - k + 2)!$ par $n - k + 2$ (au départ $n!$) :

```
puissance = n**k
fac = fac / (n-k+2)
```

Problème – Parties C et D – Convergence en loi de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) \rightarrow xe^{-x^2/2}$ pour $x > 0$; limite de densité g_1 .

Corrigé – Problème.**Partie C****1. Encadrement du logarithme.**

Soit $\phi(x) = \ln(1-x) + x$ et $\psi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. $\phi'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x} \leq 0$ et $\phi(0) = 0$, donc $\phi \leq 0$. $\psi'(x) = \frac{-1+(1+2x)(1-x)}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$ et $\psi(0) = 0$, donc $\psi \geq 0$.

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad -x - x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x.$$

2. Encadrement de $\alpha(n, m)$.

Pour $0 \leq k \leq m \leq \frac{n}{2}$, $\frac{k}{n} \in [0, \frac{1}{2}]$; on somme les encadrements de 1 avec $\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$:

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. Cas $x \leq 0$.

$\lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leq 0 < 2$ et $X_n(\Omega) = \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, donc $\mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0.$$

4. Cas $x > 0$.

Notons $k_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

a) $\sqrt{n}x - 1 < k_n \leq \sqrt{n}x$, donc $k_n \rightarrow +\infty$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{n}x} < \frac{k_n}{\sqrt{n}x} \leq 1$: par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = +\infty, \quad k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}x.$$

b) $k_n \leq \sqrt{n}x \leq \frac{n}{2}$ dès que $\sqrt{n} \geq 2x$, et $k_n \geq 2$ pour n assez grand puisque $k_n \rightarrow +\infty$.

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \quad 2 \leq \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leq \frac{n}{2}.$$

c) $\frac{n!}{(n-k+1)!} = \prod_{i=0}^{k-2} (n-i) = n^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$, donc avec 4.b) de la partie B :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

d) Pour $n \geq N$, $k_n \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ et les facteurs $1 - \frac{i}{n}$ ($0 \leq i \leq k_n - 2 < n$) sont strictement positifs, donc $\prod_{i=0}^{k_n-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \exp(\alpha(n, k_n - 2))$:

$$\mathbb{P}(X_n = k_n) = \frac{k_n - 1}{n} \exp(\alpha(n, k_n - 2)).$$

- e) Soit $m_n = k_n - 2$; pour $n \geq N$, $0 \leq m_n \leq \frac{n}{2}$ et $m_n \sim \sqrt{n}x$. Alors $\frac{m_n(m_n+1)}{2n} \rightarrow \frac{x^2}{2}$ et $\frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{6n^2} \sim \frac{2(\sqrt{n}x)^3}{6n^2} = \frac{x^3}{3\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Par 2 et le théorème d'encadrement, $\alpha(n, m_n) \rightarrow -\frac{x^2}{2}$. Enfin $\frac{k_n-1}{\sqrt{n}} \rightarrow x$, et par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = x e^{-x^2/2}.$$

Partie D

1. La fonction f_n .

- a) $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k \iff k \leq \sqrt{n}x < k+1$:

$$\{x \in \mathbb{R} ; \lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k\} = \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[.$$

- b) f_n est positive, constante égale à $\sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = k)$ sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[$; elle est nulle hors de $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}} \right[$, donc continue sauf en un nombre fini de points, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = k) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

$$f_n \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. La variable Y_n .

Notons $K = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

- a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ a pour fonction de répartition $t \mapsto 0$ si $t < 0$, t si $t \in [0, 1]$, 1 si $t > 1$. Si $k > K$, alors $k \geq K+1 > \sqrt{n}x$ et $\sqrt{n}x - k < 0$; si $k < K$, $\sqrt{n}x - k \geq K - k \geq 1$; si $k = K$, $\sqrt{n}x - k \in [0, 1]$.

$$\mathbb{P}(U \leq \sqrt{n}x - k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > K, \\ 1 & \text{si } k < K, \\ \sqrt{n}x - K & \text{si } k = K. \end{cases}$$

- b) Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = k])_{k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket}$, puis l'indépendance de X_n et U :

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [U \leq \sqrt{n}x - k]) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}(U \leq \sqrt{n}x - k).$$

D'après a), en notant $p_k = \mathbb{P}(X_n = k)$ (nul si $k \notin \llbracket 2, n+1 \rrbracket$), $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \sum_{k < K} p_k + p_K(\sqrt{n}x - K)$. D'autre part, f_n valant $\sqrt{n}p_k$ sur $\left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[$,

$$\int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \sum_{k < K} \sqrt{n}p_k \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}p_K \left(x - \frac{K}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{k < K} p_k + p_K(\sqrt{n}x - K).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

- c) La fonction de répartition de Y_n est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (ceux où f_n est discontinue), de dérivée f_n ailleurs.

$$Y_n \text{ est à densité, de densité } f_n.$$

- d) D'après la partie C, $f_n(x) \rightarrow h(x)$ pour tout réel x , où $h(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $h(x) = xe^{-x^2/2}$ si $x > 0$: $h = g_1$ (partie A avec $a = 1$), qui est une densité. Par le résultat admis :

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y, \text{ où } Y \text{ a pour densité } g_1 : x \mapsto xe^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

3. Convergence de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$.

- a) Comme $0 \leq U \leq 1$, $\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq Y_n \leq \frac{X_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $[Y_n \leq x] \subset [\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x] \subset [Y_n \leq x + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, et par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(Y_n \leq x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

- b) Notons F_Y la fonction de répartition de Y , continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $F_Y(x + \varepsilon) \leq F_Y(x) + \eta$. Pour $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$, $\mathbb{P}(Y_n \leq x + \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \mathbb{P}(Y_n \leq x + \varepsilon)$. D'après 2.d), $\mathbb{P}(Y_n \leq x) \rightarrow F_Y(x)$ et $\mathbb{P}(Y_n \leq x + \varepsilon) \rightarrow F_Y(x + \varepsilon)$: il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$,

$$F_Y(x) - \eta \leq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \leq F_Y(x + \varepsilon) + \eta \leq F_Y(x) + 2\eta.$$

Ainsi $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq x) \rightarrow F_Y(x)$ pour tout réel x : par définition de la convergence en loi,

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y, \text{ de densité } x \mapsto xe^{-x^2/2} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ (nulle sur } \mathbb{R}_-^*).$$