

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2017

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries ; Python. . .</i>	2
2 Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : réduction ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.</i>	2
3 Problème – Partie A	4
<i>Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales.</i>	4
4 Problème – Partie B	4
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; Python.</i>	4
5 Problème – Partie C	5
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; suites ; fonctions d'une variable.</i>	5
6 Problème – Partie D	5
<i>Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables.</i>	5

1 Exercice 1

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries ; Python.

On définit sur l'intervalle $]0, 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

1. a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
 b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0, 1]$.
 c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln(t))^n dt, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
 - b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - c) Calculer u_0 et u_1 .
 - d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que
- $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
- e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
 - f) Écrire une fonction Python `somme(n)` qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie la valeur de S_n .
 3. a) À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange en 0 à l'ordre n , appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in [-1/e, 0]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$.
- c) Montrer que $I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.
- d) Écrire une fonction Python `estimation(eps)` qui prend en paramètre un réel strictement positif `eps` et renvoie une valeur approchée de I à `eps` près.

2 Exercice 2

Thèmes abordés : réduction ; algèbre bilinéaire ; fonctions de plusieurs variables.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique. Si x est associé à X et y à Y , le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y = {}^t Y X.$$

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
 - a) Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $J = PD^tP$.
 - b) Déterminer le rang de J . En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
 - c) En examinant la trace de J , expliciter la matrice D .
2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
 - a) Montrer que $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right]$.
 - b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = {}^tXMX$.
 - c) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I , où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ , à déterminer, telle que $M = P\Delta^tP$.
 - e) Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, puis déterminer ces valeurs.
3. Dans cette question, A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique.
 - a) Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique.
 - b) À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle x, y \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.

- c) En déduire que $\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle = 1$.
4. On suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
 - b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
 - c) En déduire le minimum, sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$, de la fonction

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2).$$

3 Problème – Partie A

Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.
2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
 - a) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2 . Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(N^2)$.
 - b) Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(Z_a)$.
 - c) Montrer que Z_a admet une variance et calculer $\mathbb{V}(Z_a)$.

4 Problème – Partie B

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; Python.

Pour tout entier n strictement positif, on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n , et d'un stock de boules. Les boules sont déposées une à une ; pour chaque boule, l'urne est choisie au hasard de façon équiprobable. On note X_n le rang du premier tirage pour lequel l'une des urnes contient deux boules.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule une réalisation de X_n .

```
import random

def tirage(n):
    urnes = [0] * n
    x = 0
    while max(urnes) < 2:
        choix = random.randrange(n)
        urnes[choix] += 1
        x += 1
    return x
```

2. Dans cette question, $n = 1$. Déterminer la loi de X_1 , ainsi que son espérance et sa variance.
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de X_2 , ainsi que son espérance et sa variance.
4. Dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
 - a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
 - b) Montrer que $\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}$.
 - c) Montrer que X_n admet une espérance.
 - d) Écrire une fonction Python qui calcule $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n .

5 Problème – Partie C

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; suites ; fonctions d'une variable.

On reprend les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha(n, m) = \sum_{k=0}^m \ln \left(1 - \frac{k}{n} \right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1/2]$, $-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x$.
2. En déduire que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq n/2$,

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. On suppose ici que $x \leq 0$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor)$.
4. On suppose ici que $x > 0$.
 - a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - b) Justifier qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$, $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq n/2$.
 - c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{2, \dots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n} \right)$.
 - d) En déduire que pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}{n} \exp(\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)).$$

- e) Montrer alors que $\sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

6 Problème – Partie D

Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables.

On admet le résultat suivant : si W est une variable aléatoire de densité h et si $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de densités h_n telles que, pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = h(x)$, alors $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W .

On considère toujours la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie dans la partie B. On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante des variables aléatoires X_n , et l'on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier strictement positif n , on définit f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor).$$

1. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor = k$.
- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\mathbb{P}(U < \sqrt{n}x - k)$. On pourra distinguer les cas $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.
- b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$.
- c) Justifier que Y_n est une variable aléatoire à densité, de densité f_n .
- d) Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera une densité.

Lemme de Slutsky. Si Z_n converge en loi vers Z et si T_n converge en probabilité vers une constante c , alors $Z_n + T_n$ converge en loi vers $Z + c$ et $Z_n T_n$ converge en loi vers cZ .

3. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on donnera une densité.