EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – La suite (α_n)

$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$, $f_n(\alpha_n) = 1$ et $\alpha_n \to \frac{1}{2}$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Python.

a) On somme les puissances $x^1, \dots, x^n$ contenues dans le vecteur `x**np.arange(1,n+1)` :

```
def f(x, n):
    y = np.sum(x**np.arange(1, n+1))
    return y
```

b) Pour $x \neq 1$, $f_n(x) = x\dfrac{1-x^n}{1-x}$, et $f_n(1) = n$:

```
def f(x, n):
    if x == 1:
        return n
    else:
        return x * (1 - x**n) / (1 - x)
```

2. Existence et unicité de α_n.

f_n est continue sur $[0,1]$ et strictement croissante (somme de fonctions croissantes dont $x \mapsto x$ strictement croissante). $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,n] \ni 1$.

$$\boxed{\exists!\, \alpha_n \in [0,1], \quad f_n(\alpha_n) = 1.}$$

3. Monotonie.

a) $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1} \geq 1 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$$

b) (α_n) est décroissante et minorée par 0 ; par le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{(\alpha_n) \text{ converge.}}$$

4. Limite.

a) α_2 est la solution dans $[0,1]$ de $x^2+x-1=0$, dont les racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; comme $2<\sqrt{5}<3$:

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset [0,1].}$$

b) Pour $n \geq 2$, $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_2 < 1$ (décroissance), donc $0 \leq \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1} \to 0$. Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.}$$

c) Pour $n \geq 2$, $\alpha_n \neq 1$ et $f_n(\alpha_n) = \alpha_n \frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n} = 1$, d'où $\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1-\alpha_n$, soit $\alpha_n = \frac{1+\alpha_n^{n+1}}{2}$. Avec b) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$$

5. Interprétation du programme.

La boucle s'arrête au premier réel x de la forme $0{,}001\,j$ tel que $f_n(x) \geq 1$. Comme f_n est strictement croissante, $f_n(x) \geq 1 \iff x \geq \alpha_n$: le programme affiche le plus petit multiple de 0,001 supérieur ou égal à α_n.

$$\boxed{\alpha_n \leq x < \alpha_n + 0{,}001 \ : \text{ valeur approchée par excès de } \alpha_n \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Exercice 2

Exercice 2 – Maximum de variables uniformes

$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $Y_n = n(1-M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.

Corrigé – Exercice 2.

1. La variable M_n.

a) $[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$; par indépendance, $F_{M_n}(x) = \prod_i \mathbb{P}(X_i \leq x)$.

$$\boxed{F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$\boxed{M_n \text{ est une variable à densité.}}$$

b) En dérivant là où F_{M_n} est dérivable :

$$\boxed{f_{M_n}(x) = nx^{n-1} \text{ si } x \in [0,1], \qquad f_{M_n}(x) = 0 \text{ sinon.}}$$

c) f_{M_n} est nulle hors du segment $[0,1]$, donc les moments existent :

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^1 nx^n \,\mathrm{d}x, \qquad \mathbb{E}(M_n^2) = \int_0^1 nx^{n+1} \,\mathrm{d}x,$$

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{n+1}, \qquad \mathbb{E}(M_n^2) = \frac{n}{n+2}.}$$

d) Par l'inégalité de Markov appliquée à $(M_n-1)^2 \geq 0$:

$$\mathbb{P}\big((M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big((M_n-1)^2\big)}{\varepsilon^2},$$

avec

$$\mathbb{E}\big((M_n-1)^2\big) = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big((M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\big) \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}.}$$

e) $[|M_n - 1| \geq \varepsilon] = [(M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2]$ et le majorant de d) tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|M_n - 1| \geq \varepsilon\big) = 0.}$$

2. Simulation.

a) `X` contient une réalisation de $(X_1, \ldots, X_n)$; on prend le maximum :

```
Y = n * (1 - np.max(X))
```

b) Les deux histogrammes sont presque identiques : la loi de Y_{1000} semble très proche de la loi $\mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Conjecture : } (Y_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi } \mathcal{E}(1).}$$

3. Convergence en loi.

a) M_n étant à densité, $F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}) = 1 - F_{M_n}(1-\frac{x}{n})$. D'après 1.a) :

$$\boxed{F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq n, \\ 1 & \text{si } x > n. \end{cases}}$$

b) Soit $x \geq 0$. Pour $n > x$, $(1-\frac{x}{n})^n = \exp\big(n\ln(1-\frac{x}{n})\big)$ et $n\ln(1-\frac{x}{n}) \sim n\cdot(-\frac{x}{n}) = -x$ (si $x > 0$) ; par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.}$$

c) Pour $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$. Ainsi $F_{Y_n}(x)$ tend, pour tout réel x, vers la valeur en x de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$. Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Y, \quad Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

Exercice 3

Exercice 3 – Une famille de $n+1$ vecteurs unitaires de F

$e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}}(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u)$, $\|x\|^2 = \frac{n}{n+1}\sum_k \langle x, e_k\rangle^2$ sur F.

Corrigé – Exercice 3.

1. La matrice A.

a) $A = J - (n+1)I$. Les coefficients de J^2 valent $\sum_{k=1}^n 1\cdot 1 = n$, donc $J^2 = nJ$ et

$$A^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I,$$

$$\boxed{A = J - (n+1)I, \qquad A^2 = -(n+2)J + (n+1)^2 I.}$$

b) Avec $J = A + (n+1)I$: $A^2 = -(n+2)A - (n+2)(n+1)I + (n+1)^2 I = -(n+2)A - (n+1)I$.

$$\boxed{X^2 + (n+2)X + (n+1) = (X+1)(X+n+1) \text{ est annulateur de } A,}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, -(n+1)\}.}$$

c) 0 n'est pas racine du polynôme annulateur, donc pas valeur propre de A. (Explicitement, $A(A + (n+2)I) = -(n+1)I$.)

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{n+1}(A + (n+2)I).}$$

2. Norme de u.

La famille (ε_k) étant orthonormée, $\|u\|^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \|\varepsilon_k\|^2 = 1$.

$$\boxed{\|u\| = 1.}$$

3. Les vecteurs e_i.

On a $\langle \varepsilon_i, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Notons $w_i = \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u$.

a) Comme $\|u\| = 1$, pour tous i, j :

$$\langle w_i, w_j\rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\|u\|^2 = \delta_{i,j} - \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\|e_i\|^2 = \frac{n+1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1$:

$$\boxed{\|e_i\| = 1.}$$

b) Pour $i \neq j$:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{n+1}{n}\Big(0 - \frac{1}{n+1}\Big),$$

$$\boxed{\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}.}$$

c) $\langle w_i, u\rangle = \langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle \|u\|^2 = 0$:

$$\boxed{e_0, \dots, e_n \in F = \mathrm{Vect}(u)^\perp.}$$

d) $u \neq 0$, donc $\dim F = (n+1) - 1 = n$. Supposons $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$. En faisant le produit scalaire avec e_i $(1 \leq i \leq n)$: $\sum_j \langle e_i, e_j\rangle \lambda_j = 0$, c'est-à-dire $G\Lambda = 0$ avec $\Lambda = {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $G = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$. D'après a) et b), G a des coefficients diagonaux égaux à 1 et les autres égaux à $-\frac{1}{n}$: $G = -\frac{1}{n}A$, inversible (1.c). Donc $\Lambda = 0$: la famille est libre, de cardinal $n = \dim F$.

$$\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } F.}$$

4. La forme f.

a) Pour y fixé, $x \mapsto \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle$ et $x \mapsto \langle x, y\rangle$ sont linéaires, donc f est linéaire par rapport à x ; l'expression est symétrique en (x, y), d'où la linéarité par rapport à y.

$$\boxed{f \text{ est une forme bilinéaire symétrique sur } F.}$$

b) Pour $i = j$: $\sum_{k=0}^n \langle e_i, e_k\rangle^2 = 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n}$, donc $f(e_i, e_i) = \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n} \cdot 1 = 0$.
Pour $i \neq j$: les termes $k = i$ et $k = j$ valent chacun $-\frac{1}{n}$, les $n-1$ autres valent $\frac{1}{n^2}$:

$$f(e_i, e_j) = -\frac{2}{n} + \frac{n-1}{n^2} - \frac{n+1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{-2n + n - 1 + n + 1}{n^2} = 0.$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad f(e_i, e_j) = 0.}$$

c) Pour $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$ dans F, par bilinéarité $f(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j f(e_i, e_j) = 0$:

$$\boxed{\forall (x, y) \in F^2, \quad \sum_{k=0}^n \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.}$$

d) Avec $y = x$:

$$\boxed{\forall x \in F, \quad \|x\|^2 = \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^n \langle x, e_k\rangle^2.}$$

Problème

Problème – Partie I – L'endomorphisme $\varphi(P) = \sum_k P^{(k)}$

φ est un automorphisme de seule valeur propre 1 et $\varphi^{-1}(P) = P - P'$.

Corrigé – Problème.

1. Endomorphisme.

La dérivation est linéaire, donc chaque $P \mapsto P^{(k)}$ l'est, et φ aussi. Si $\deg P \leq n$, $\deg P^{(k)} \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Valeurs propres.

a) $e_0' = 0$, donc $\varphi(e_0) = e_0 \neq 0$:

$$\boxed{\varphi(e_0) = e_0, \quad 1 \text{ est valeur propre de } \varphi.}$$

b) Pour $1 \leq k \leq j$, $e_j^{(k)} = \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k}$ et $e_j^{(k)} = 0$ pour $k > j$:

$$\varphi(e_j) - e_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k},$$

$$\boxed{\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

c) Ainsi $\varphi(e_j) = e_j + (\text{combinaison linéaire de } e_0, \ldots, e_{j-1})$: la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ est triangulaire supérieure et } \mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}.}$$

d) 0 n'est pas valeur propre, donc φ est injectif, donc bijectif ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie).

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. L'inverse de φ.

a) Par télescopage, et comme $P^{(n+1)} = 0$:

$$\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)} = P - P^{(n+1)},$$

$$\boxed{\varphi(P - P') = P.}$$

b) D'après a), $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ où $\psi : P \mapsto P - P'$; φ étant bijectif, $\varphi^{-1} = \psi$. Comme $\psi(e_0) = e_0$ et $\psi(e_j) = e_j - je_{j-1}$:

$$\boxed{\varphi^{-1}(P) = P - P', \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

c) Le script construit dans `M` la matrice de φ^{-1} (coefficient $-k$ en ligne $k-1$, colonne k) ; la matrice de φ est son inverse :

```
A = al.inv(M)
```

Problème – Partie II – L'endomorphisme Ψ

$\Psi(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\Psi = \varphi$.

Corrigé – Problème.

4. Convergence.

a) $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $t^2 \cdot t^k\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ (croissances comparées) : $t^k\mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann). Par comparaison (fonctions positives au voisinage de $+\infty$) :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b) $P(t)\mathrm{e}^{-t} = \sum_k a_k t^k\mathrm{e}^{-t}$: par linéarité des intégrales convergentes,

$$\boxed{\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

5. Calcul.

a) $\int_x^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-A} \to \mathrm{e}^{-x}$:

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}.}$$

b) Notons $I_k = \int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour $A > x$, on intègre par parties sur $[x, A]$ avec $a(t) = t^{k+1}$, $b(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a'(t) = (k+1)t^k$, $b'(t) = \mathrm{e}^{-t}$:

$$\int_x^A t^{k+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^{k+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_x^A + (k+1)\int_x^A t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} x^{k+1}\mathrm{e}^{-x} + (k+1)I_k.$$

Montrons par récurrence $I_k = k!\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}$: c'est a) pour $k = 0$, et si c'est vrai au rang k,

$$I_{k+1} = x^{k+1}\mathrm{e}^{-x} + (k+1)!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} = (k+1)!\sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \mathrm{e}^{-x}.}$$

6. Informatique.

a) La première boucle calcule $p = k!$. Dans la seconde, on passe de $\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$ à $\frac{x^i}{i!}$ en multipliant par $\frac{x}{i}$, et on cumule dans `somme`, qui vaut finalement $\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$:

```
u = u * x / i
somme = somme + u
```

b) La fonction $u \mapsto u + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$; le changement de variable $t = u + x$ conserve la nature et

$$\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (u+x)^k \mathrm{e}^{-u-x}\,\mathrm{d}u,$$

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.}$$

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, de densité $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de transfert donne $\int_0^{+\infty}(u+x)^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \mathbb{E}((Z+x)^k)$, que l'on approche (loi faible des grands nombres) par la moyenne de 100 000 réalisations indépendantes de $(Z+x)^k$:

```
s = np.exp(-x) * np.mean((Z + x)**k)
```

7. L'application Ψ.

a) Pour $P = \sum_k a_k e_k$, par linéarité de l'intégrale et 5.b), $\Psi(P)(x) = \sum_k a_k\, k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$: $\Psi(P)$ est un polynôme de degré $\leq n$, et Ψ est linéaire (linéarité de l'intégrale).

$$\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

b) $F(x) = \mathrm{e}^x\Big(\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)$; $x \mapsto \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en 0 d'une fonction continue, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = F(x) - \mathrm{e}^x P(x)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } F' = F - P.}$$

c) Si $\Psi(P) = 0$, alors $F = 0$, $F' = 0$ et $P = F - F' = 0$: Ψ est injectif, donc bijectif (dimension finie).

$$\boxed{\Psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

8. Valeurs propres de Ψ.

a) $F = \Psi(P) = \lambda P$, donc $F' = \lambda P'$; d'après 7.b), $\lambda P' = \lambda P - P$, et $\lambda \neq 0$:

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$$

b) Si $\lambda \neq 1$, $\frac{\lambda-1}{\lambda} \neq 0$ et P' serait non nul de même degré que $P \neq 0$; or $\deg P' < \deg P$ si $\deg P \geq 1$ et $P' = 0$ si P est constant : contradiction. De plus 0 n'est pas valeur propre (Ψ automorphisme).

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Psi) \subset \{1\}.}$$

c) D'après 5.a), $\Psi(e_0)(x) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1 : \Psi(e_0) = e_0 \neq 0$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Psi) = \{1\}.}$$

9. Égalité $\Psi = \varphi$ et application.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par intégration par parties sur $[x, A]$ (P et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ de classe $\mathcal{C}^1$), $\int_x^{+\infty} P'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -P(x)\mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (le crochet en A tend vers 0 par croissances comparées). Donc $\Psi(P - P')(x) = \mathrm{e}^x \cdot P(x)\mathrm{e}^{-x} = P(x)$, et avec 3.a), $\Psi(P - P') = P = \varphi(P - P')$. Comme $P \mapsto P - P' = \varphi^{-1}(P)$ est bijective, tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $Q = P - P'$:

$$\boxed{\Psi = \varphi.}$$

b) Pour $x \geq a$, $P \geq 0$ sur $[x, +\infty[\subset [a, +\infty[$, donc par positivité de l'intégrale :

$$\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) = \varphi(P)(x) = \Psi(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

$$\boxed{\forall x \geq a, \quad \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0.}$$