

Année : 2017

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : <i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; Python</i>	1
Exercice 2 : <i>Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; Python</i>	1
Exercice 3 : <i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire</i>	3
Problème : <i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; intégrales ; intégrales généralisées ; Python</i>	4

Exercice 1

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; Python

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

- 1) a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x, n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
def f(x, n):
    return sum(.....)
```

- b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de définir `f`, en complétant le code suivant.

```
def f(x, n):
    if x == 1:
        return .....
    else:
        return .....
```

- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.

- 3) a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

- 4) a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

- b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

- 5) On suppose que f_n a été définie à la question 1. On considère les instructions supplémentaires suivantes :

```
n = int(input("Entrer la valeur de n : "))
x = 0
while f(x, n) < 1:
    x = x + 0.001
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; Python

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 1) On note $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
 - a) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F_{M_n}(x)$, puis montrer que M_n est une variable à densité.
 - b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n .
 - c) Établir l'existence et donner la valeur de $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(M_n^2)$.
 - d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant ne dépendant que de n et de ε de $\mathbb{P}((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2)$.
 - e) Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$.

- 2) On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.

- a) On rappelle que la commande `numpy.random.uniform(0, 1, n)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n .

```
import numpy as np
```

```
def f(n):
    X = np.random.uniform(0, 1, n)
    Y = .....
    return Y
```

- b) Voici deux scripts, le second utilisant la fonction `f` définie ci-dessus.

<pre>import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt e = np.random.exponential(1, 10000) plt.hist(e, bins=np.arange(0, 11)) plt.show()</pre>	<pre>import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt n = int(input("Valeur de n : ")) Y = [f(n) for k in range(10000)] plt.hist(Y, bins=np.arange(0, 11)) plt.show()</pre>
--	--

Script 1

Script 2

Chacun de ces scripts simule 10 000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en dix classes $[0, 1], [1, 2], \dots, [9, 10]$, et trace l'histogramme correspondant. La largeur de chaque rectangle vaut 1 et sa hauteur est proportionnelle à l'effectif de la classe.

Le script 1, dans lequel les variables suivent la loi exponentielle de paramètre 1, et le script 2, dans lequel elles suivent la même loi que Y_n , donnent, pour $n = 1000$, deux histogrammes d'allures très proches. Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite de variables aléatoires (Y_n) ?

- 3) a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n .
- b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x)$.

- c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2.b).

Exercice 3

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent $-n$, les autres valant tous 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Exprimer A comme combinaison linéaire de J et de I , puis faire de même pour A^2 .
- b) En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A .
- c) Montrer que A est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien E , de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^n \varepsilon_k.$$

On pose aussi, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} (\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u).$$

- 2) Calculer la norme du vecteur u .
- 3)
 - a) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\|e_i\| = 1$.
 - b) Montrer que, pour tous entiers distincts $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$.
 - c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$ appartiennent au sous-espace vectoriel $F = (\text{Vect}(u))^\perp$ de E .
 - d) Montrer, en utilisant la question 1.c), que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F .
- 4) On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle.$$

- a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
- b) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.
- c) En déduire que, pour tout $(x, y) \in F \times F$,

$$\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle.$$

- d) En déduire également que, pour tout $x \in F$,

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Problème

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; intégrales ; intégrales généralisées ; Python

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k = X^k$.

Partie I — Étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'application φ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)},$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P , avec la convention $P^{(0)} = P$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2)
 - a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ .
 - b) Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
 - c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
 - d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3)
 - a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
 - b) Déterminer φ^{-1} , puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
 - c) On donne le script Python suivant :

```
import numpy as np

n = int(input("Entrer la valeur de n : "))
M = np.eye(n + 1)
for k in range(1, n + 1):
    M[k - 1, k] = -k
A = .....
print(A)
```

Compléter l'avant-dernière ligne pour que ce script affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie II — Étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

On désigne par x un réel quelconque.

4) a) Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est convergente.

b) En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ est convergente.

5) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$.

b) Établir que, pour tout entier naturel k ,

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} e^{-x}.$$

6) Informatique.

a) On admet que, si u est un tableau NumPy, la commande `np.prod(u)` renvoie le produit de ses éléments et la commande `np.cumprod(u)` renvoie un tableau dont l'élément d'indice k est le produit des $k+1$ premiers éléments de u . Utiliser l'égalité obtenue à la question 5.b) pour compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche s , valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

```
import numpy as np
from math import exp

k = int(input("Entrer la valeur de k : "))
x = float(input("Entrer la valeur de x : "))
p = np.prod(np.arange(1, k + 1))
u = ..... / .....
s = p * ..... * exp(-x)
print(s)
```

b) Montrer, grâce au changement de variable $t = u + x$, que

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} (u + x)^k e^{-u} du.$$

En déduire l'expression manquante du script Python suivant afin qu'il calcule et affiche une valeur approchée de cette intégrale par la méthode de Monte-Carlo.

```
import numpy as np
from math import exp

k = int(input("Entrer la valeur de k : "))
x = float(input("Entrer la valeur de x : "))
Z = np.random.exponential(1, 100000)
s = exp(-x) * np.mean(.....)
print(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt.$$

- 7) **a)** Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b)** Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P .
- c)** Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 8) On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.
- a)** Utiliser la relation obtenue à la question 7.b) pour établir que $P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}P$.
- b)** En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ .
- c)** Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ . On ne demande pas le sous-espace propre associé.
- 9) **a)** Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.
- b)** En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq a$, alors

$$\forall x \geq a, \quad \sum_{i=0}^n P^{(i)}(x) \geq 0.$$