

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Parties I et II – La matrice A et l'endomorphisme $T(P) = (X(X-1)P)'$

Réduction de A , matrice, noyau et valeurs propres de T .

Corrigé – Problème 1.

1. Inversibilité et rang de A .

A est triangulaire supérieure et possède un coefficient diagonal nul : elle n'est pas inversible. Sa première colonne est nulle et les deux autres, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, ne sont pas colinéaires.

A n'est pas inversible et $\text{rg } A = 2$.

2. Valeurs propres.

A est triangulaire : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes :

$\text{Sp}(A) = \{0, 2, 6\}$ et A est diagonalisable.

3. Diagonalisation.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$:

- $AX = 0 \iff y = 0, 2y - 4z = 0, 6z = 0 \iff y = z = 0 : E_0 = \text{Vect}^t(1, 0, 0)$;
- $AX = 2X \iff -2x - y = 0, -4z = 0 \iff z = 0, y = -2x : E_2 = \text{Vect}^t(1, -2, 0)$;
- $AX = 6X \iff -6x - y = 0, -4y - 4z = 0 \iff y = -6x, z = 6x : E_6 = \text{Vect}^t(1, -6, 6)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

(P est inversible car ses colonnes sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.)

4. T est un endomorphisme.

La dérivation et la multiplication par $X(X-1)$ sont linéaires, donc T est linéaire. Si $\deg P \leq n$, $\deg(X(X-1)P') \leq n+1$, donc $\deg T(P) \leq n$.

T est un endomorphisme de E .

5. Matrice de T .

$T(1) = 0$ et, pour $k \geq 1$, $T(X^k) = (kX^{k+1} - kX^k)'$:

$$T(X^k) = k(k+1)X^k - k^2X^{k-1} \quad (k \in \llbracket 0, n \rrbracket).$$

La colonne d'indice k (numérotée de 0 à n) de M a pour coefficients $k(k+1)$ en ligne k et $-k^2$ en ligne $k-1$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

6. Bijectivité, rang, noyau.

$T(1) = 0$: T n'est pas injectif, donc pas bijectif. Pour $k \geq 1$, $T(X^k)$ est de degré exactement k (coefficient dominant $k(k+1) \neq 0$) : la famille $(T(X), \dots, T(X^n))$ est échelonnée en degrés, donc libre, et $\text{rg } T \geq n$. Comme $\text{rg } T \leq n$ (T non injectif), $\text{rg } T = n$; par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } T = 1$, et $1 \in \text{Ker } T$.

$$T \text{ n'est pas bijectif, } \text{rg } T = n, \quad \text{Ker } T = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1).$$

7. Valeurs propres de T .

M est triangulaire : les valeurs propres de T sont les $k(k+1)$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, deux à deux distinctes (suite strictement croissante). On a $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$.

$$\text{Sp}(T) = \{k(k+1) ; 0 \leq k \leq n\} \quad \text{et } T \text{ est diagonalisable.}$$

Problème 1 – Parties III et IV – Produit scalaire et racine carrée de T

$\varphi(P, Q) = \int_0^1 PQ$, T symétrique, base orthonormale de vecteurs propres pour $n = 2$.

Corrigé – Problème 1.**8. Produit scalaire.**

φ est bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment), symétrique, linéaire par rapport à la première variable (linéarité de l'intégrale), donc bilinéaire. $\varphi(P, P) = \int_0^1 P^2 \geq 0$. Si $\varphi(P, P) = 0$, la fonction continue et positive P^2 est nulle sur

$[0, 1]$: P a une infinité de racines, donc $P = 0$.

φ est un produit scalaire sur E .

9. Une formule.

On intègre par parties sur le segment $[0, 1]$ avec $a = X(X - 1)P'$ et $b = Q$, de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $a' = T(P)$ et $b' = Q'$:

$$\varphi(T(P), Q) = [x(x - 1)P'(x)Q(x)]_0^1 - \int_0^1 x(x - 1)P'(x)Q'(x) dx,$$

et le crochet est nul (facteur $x(x - 1)$ en 0 et en 1).

$$\varphi(T(P), Q) = - \int_0^1 x(x - 1)P'(x)Q'(x) dx.$$

10. Symétrie.

L'expression de 9 est symétrique en (P, Q) , donc $\varphi(T(P), Q) = \varphi(T(Q), P) = \varphi(P, T(Q))$.

T est symétrique pour φ .

Par le théorème spectral, T est diagonalisable (dans une base orthonormale) : on retrouve le résultat de la question 7.

11. Positivité.

a) Pour $x \in [0, 1]$, $-x(x - 1) = x(1 - x) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale

$$\varphi(T(P), P) = \int_0^1 x(1 - x)P'(x)^2 dx \geq 0.$$

b) La fonction $x \mapsto x(1 - x)P'(x)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$: son intégrale est nulle si et seulement si elle est nulle sur $[0, 1]$, c'est-à-dire $P' = 0$ sur $]0, 1[$, soit $P' = 0$ (infinité de racines), soit P constant.

$$\varphi(T(P), P) = 0 \iff P \in \mathbb{R}_0[X].$$

12. Matrice pour $n = 2$.

D'après 5 avec $n = 2$:

$$\text{Mat}_B(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

13. Base orthonormale de vecteurs propres.

D'après 3, les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = 1 - 2X$, $P_2 = 1 - 6X + 6X^2$ (coordonnées : colonnes de P) sont vecteurs propres de T pour 0, 2, 6. T étant symétrique, ils sont deux à deux orthogonaux (valeurs propres distinctes). Normes :

$$\|P_0\|^2 = 1, \quad \|P_1\|^2 = \int_0^1 (1 - 2x)^2 dx = \left[-\frac{(1 - 2x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\|P_2\|^2 = \int_0^1 (36x^4 - 72x^3 + 48x^2 - 12x + 1) dx = \frac{36}{5} - 18 + 16 - 6 + 1 = \frac{1}{5}.$$

$$\mathcal{C} = \left(1, \sqrt{3}(1 - 2X), \sqrt{5}(1 - 6X + 6X^2) \right).$$

14. Racine carrée de T .

Soit V l'endomorphisme de matrice $\text{diag}(0, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ dans $\mathcal{C}$. Sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{C}$ est symétrique, donc V est symétrique ; $V \circ V$ a pour matrice $\text{diag}(0, 2, 6) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(T)$. Enfin, si P a pour coordonnées (c_0, c_1, c_2) dans $\mathcal{C}$, $\varphi(V(P), P) = \sqrt{2} c_1^2 + \sqrt{6} c_2^2 \geq 0$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Problème 2

Problème 2 – Parties I et II – La fonction H ; comportement en $\frac{1}{2}$

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-x} dt, \quad H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}, \quad H(x) \sim \frac{1}{2x-1} \text{ en } \frac{1}{2}.$$

Corrigé – Problème 2.

1. Domaine.

Soit $x \in I$. $t \mapsto (1+t^2)^{-x}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et $(1+t^2)^{-x} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}}$ avec $2x > 1$: par comparaison à une intégrale de Riemann convergente,

$$H \text{ est définie sur } I.$$

2. Monotonie.

Si $x < y$ dans I , comme $1+t^2 \geq 1$, $(1+t^2)^{-y} \leq (1+t^2)^{-x}$; par croissance de l'intégrale, $H(y) \leq H(x)$.

$$H \text{ est décroissante sur } I.$$

3. Valeurs entières.

a) $\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(A) \rightarrow \frac{\pi}{2} :$

$$H(1) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Pour $A > 0$, on intègre par parties sur $[0, A]$ avec $a(t) = (1+t^2)^{-n}$, $b(t) = t$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$, $b'(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, $\frac{A}{(1+A^2)^n} \rightarrow 0$; les intégrales convergent :

$$H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)), \quad H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} H(n).$$

c) On part de $H(1) = \frac{\pi}{2}$ et on applique la relation de récurrence :

def H(n):

 h = np.pi / 2

 for k in range(1, n):

 h = h * (2*k - 1) / (2*k)

 return h

d) Récurrence : pour $n = 1$, $\frac{0! \pi}{2^1 (0!)^2} = \frac{\pi}{2} = H(1)$. Si la formule est vraie au rang n , d'après b),

$$H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2} = \frac{(2n-2)! (2n-1)(2n) \pi}{2^{2n-1} \cdot 4n^2 ((n-1)!)^2} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}.$$

4. Un changement de variable.

- a) φ est dérivable, $\varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} > 0$: φ est continue et strictement croissante, de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; $\varphi(0) = 0$ et φ^{-1} est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi \text{ bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \varphi^{-1}(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty.$$

- b) φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$: le changement de variable $t = \varphi(u)$ conserve la nature des intégrales. Or $1 + \varphi(u)^2 = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2$ et $\varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, donc

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^{-2x+1} du = 2^{2x-1} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}.$$

$$\forall x \in I, \quad H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}.$$

5. Encadrement.

- a) Pour $u \geq 0$, $0 < e^{-u} \leq 1 \leq e^u$:

$$e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u.$$

- b) Comme $2x - 1 > 0$, $y \mapsto y^{-(2x-1)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $(2e^u)^{-(2x-1)} \leq (e^u + e^{-u})^{-(2x-1)} \leq e^{-(2x-1)u}$. Avec $\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u} du = \frac{1}{2x-1}$ et $\frac{4^x}{2} \cdot 2^{-(2x-1)} = 1$:

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.$$

6. Comportement en $\frac{1}{2}$.

Le minorant tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$. De plus $1 \leq (2x-1)H(x) \leq \frac{4^x}{2} \rightarrow 1$; par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} H(x) = +\infty, \quad H(x) \underset{x \rightarrow \frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{2x-1}.$$

Problème 2 – Partie III – Comportement en $+\infty$

$$H(x) \rightarrow 0 \text{ et } H(x) \sim \frac{K}{\sqrt{x}}.$$

Corrigé – Problème 2.

8. Limite en $+\infty$.

- a) $g : u \mapsto \ln(1+u) - \frac{u}{2}$ vérifie $g'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} = \frac{1-u}{2(1+u)} \geq 0$ sur $[0, 1]$ et $g(0) = 0$:

$$\forall u \in [0, 1], \quad \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}.$$

- b) Une densité de $\mathcal{N}(0, \frac{1}{x})$ est $t \mapsto \sqrt{\frac{x}{2\pi}} e^{-xt^2/2}$; elle est paire et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

- c) Pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \in [0, 1]$ et a) donne $(1 + t^2)^{-x} = e^{-x \ln(1+t^2)} \leq e^{-xt^2/2}$ ($x > 0$).
Par croissance de l'intégrale et b) :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

- d) Pour $t \geq 1$, $(1 + t^2)^{-x} \leq t^{-2x}$ et $\int_1^{+\infty} t^{-2x} dt = \frac{1}{2x-1}$:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \leq \frac{1}{2x-1}.$$

- e) $0 \leq H(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + \frac{1}{2x-1} \rightarrow 0$; par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0.$$

9. Équivalent de $H(n)$.

- a) D'après 3.b),

$$u_{n+1} - u_n = \ln \frac{H(n+1)}{H(n)} + \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Avec $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.$$

- b) $u_n - u_{n+1} \sim \frac{3}{8n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge.

$$\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

- c) $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ converge vers un réel ℓ . Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt{n} H(n) = e^{u_n} \rightarrow K = e^\ell > 0$.

$$H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}, \quad K = e^\ell > 0.$$

10. Équivalent de $H(x)$.

Pour $x \geq 1$, notons $m = \lfloor x \rfloor$: $m \leq x < m+1$, et H est décroissante, donc $H(m+1) \leq H(x) \leq H(m)$, puis

$$\sqrt{\frac{x}{m+1}} \sqrt{m+1} H(m+1) \leq \sqrt{x} H(x) \leq \sqrt{\frac{x}{m}} \sqrt{m} H(m).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$, $\frac{x}{m} \rightarrow 1$ et $\frac{x}{m+1} \rightarrow 1$ (car $1 \leq \frac{x}{m} < 1 + \frac{1}{m}$), et d'après 9.c) $\sqrt{m} H(m) \rightarrow K$, $\sqrt{m+1} H(m+1) \rightarrow K$. Par encadrement, $\sqrt{x} H(x) \rightarrow K$:

$$H(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.$$

Problème 2 – Partie IV – Une suite de variables aléatoires

$$f(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)} \text{ sur } \mathbb{R}_+ ; Z_n = \frac{n}{M_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Corrigé – Problème 2.**11. Densité.**

f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et $\int_0^A \frac{2dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(A) \rightarrow 1$.

f est une densité.

12. La variable X .

a)

$$F_X(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_X(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) \text{ si } x \geq 0.$$

b) $tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi t} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge : X n'admet pas d'espérance. Si X admettait une variance, elle admettrait un moment d'ordre 2, donc une espérance.

X n'admet ni espérance ni variance.

13. Convergence en loi de Z_n .

a) $[M_n \leq x] = \bigcap_i [X_i \leq x]$ et, par indépendance, $F_{M_n} = F_X^n$:

$$F_{M_n}(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_{M_n}(x) = \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right)^n \text{ si } x \geq 0.$$

b) $k : u \mapsto \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec $k'(u) = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{1+1/u^2} = 0$: k est constante, égale à $k(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Par ailleurs $\frac{\text{Arctan}(u)}{u} = \frac{\text{Arctan}(u) - \text{Arctan}(0)}{u - 0} \rightarrow \text{Arctan}'(0) = 1$.

$$\text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (u > 0), \quad \text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

c) Soit $x > 0$. Comme $M_n > 0$, $[Z_n \leq x] = [M_n \geq \frac{n}{x}]$, et M_n étant à densité, $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 1 - F_{M_n}\left(\frac{n}{x}\right) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n$. D'après b), $\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\frac{n}{x} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\frac{x}{n}$:

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

d) Soit $x > 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\frac{x}{n} \sim \frac{2x}{\pi n} \rightarrow 0$. Alors $n \ln(1 - a_n) \sim -na_n \rightarrow -\frac{2x}{\pi}$, d'où $\mathbb{P}(Z_n \leq x) \rightarrow 1 - e^{-2x/\pi}$. Pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 0$ ($Z_n > 0$). La limite est, en tout réel x , la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$; par définition de la convergence en loi :

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right).$$