

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Parties 1 et 2 – Deux premiers exemples

Parties 1 et 2 – Points extrémaux de $]0, 1[$, $[0, 1]$ et A_2

$A_2 = \{M_\alpha = \alpha I_2 + (1 - \alpha)J\}$: points extrémaux, inverses, réduction simultanée.

Corrigé – Parties 1 et 2.

1. Le cas $A =]0, 1[$.

Soit $a \in]0, 1[$ et $h = \frac{1}{2} \min(a, 1 - a) > 0$. Alors $x = a - h$ et $y = a + h$ sont dans $]0, 1[$, $\frac{x+y}{2} = a$ et $x \neq a$.

Aucun point de $]0, 1[$ n'est extrémal.

2. Le cas $A = [0, 1]$.

Le raisonnement de 1 montre qu'aucun $a \in]0, 1[$ n'est extrémal dans $[0, 1]$. Si $x, y \in [0, 1]$ et $\frac{x+y}{2} = 0$, alors $x + y = 0$ avec $x, y \geq 0$, donc $x = y = 0$; de même, $\frac{x+y}{2} = 1$ avec $x, y \leq 1$ impose $x = y = 1$.

Les points extrémaux de $[0, 1]$ sont 0 et 1.

3. Description de A_2 .

a) $\alpha I_2 + (1 - \alpha)J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} = M_\alpha :$

$$A_2 = \{\alpha I_2 + (1 - \alpha)J ; \alpha \in [0, 1]\}.$$

b) Par a), $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} I_2 + (1 - \frac{\alpha+\beta}{2})J$ avec $\frac{\alpha+\beta}{2} \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \in A_2.$$

c) Soit $N_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -(1 - \alpha) \\ -(1 - \alpha) & \alpha \end{pmatrix}$. On calcule $M_\alpha N_\alpha = (\alpha^2 - (1 - \alpha)^2) I_2 = (2\alpha - 1) I_2$. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, M_α est inversible d'inverse $\frac{1}{2\alpha - 1} N_\alpha$. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, les deux colonnes de $M_{1/2}$ sont égales : $M_{1/2}$ n'est pas inversible.

$$M_\alpha \text{ inversible} \iff \alpha \neq \frac{1}{2}, \quad M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Les lignes de M_α^{-1} ont pour somme $\frac{2\alpha-1}{2\alpha-1} = 1$: $M_\alpha^{-1} = M_\beta$ avec $\beta = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, et $M_\alpha^{-1} \in A_2 \iff \beta \in [0, 1]$. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\beta \leq 1 \iff \alpha \leq 2\alpha - 1 \iff \alpha \geq 1$; si $\alpha < \frac{1}{2}$, $2\alpha - 1 < 0$ et $\beta \geq 0 \iff \alpha \leq 0$.

$$M_\alpha^{-1} \in A_2 \iff \alpha \in \{0, 1\}.$$

4. Points extrémaux de A_2 .

- a) $I_2 = M_1$: si $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = M_1$, alors $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ avec $\alpha, \beta \leq 1$, donc $\alpha = \beta = 1$. De même $J = M_0$ et $\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ avec $\alpha, \beta \geq 0$ impose $\alpha = \beta = 0$.

$$I_2 \text{ et } J \text{ sont des points extrémaux de } A_2.$$

- b) $2\alpha \in]0, 1]$ donc $M_{2\alpha} \in A_2$, et d'après 3.b), $\frac{1}{2}(M_{2\alpha} + M_0) = M_\alpha$ avec $J = M_0$. Comme $M_{2\alpha} \neq M_\alpha$ ($\alpha \neq 0$) :

$$M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J) \text{ et } M_\alpha \text{ n'est pas extrémal pour } \alpha \in]0, \frac{1}{2}].$$

- c) Pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, $2\alpha - 1 \in [0, 1[$ et $\frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + M_1) = M_\alpha$ avec $M_1 = I_2 \neq M_\alpha$:

$$M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + I_2) \text{ et } M_\alpha \text{ n'est pas extrémal pour } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1[.$$

Ainsi les points extrémaux de A_2 sont exactement I_2 et J .

5. Réduction simultanée.

- a) $J^2 = I_2$, donc $X^2 - 1$ est annulateur et $\text{Sp}(J) \subset \{-1, 1\}$. $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et les sous-espaces propres sont de dimension 1 (somme des dimensions ≤ 2) :

$$\text{Sp}(J) = \{-1, 1\}, \quad E_1(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1}(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (colonnes libres), $P^{-1}JP = \text{diag}(1, -1)$ et $P^{-1}M_\alpha P = \alpha I_2 + (1 - \alpha)\text{diag}(1, -1)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

- c) u_α est un projecteur si et seulement si $D_\alpha^2 = D_\alpha$, c'est-à-dire $(2\alpha - 1)^2 = 2\alpha - 1$, soit $2\alpha - 1 \in \{0, 1\}$: $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned} \alpha = 1 : & \quad u_1 = \text{Id}, \text{ Im} = \mathbb{R}^2, \text{ Ker} = \{0\} ; \\ \alpha = \frac{1}{2} : & \quad \text{Im}(u_{1/2}) = \text{Vect}((1, 1)), \text{ Ker}(u_{1/2}) = \text{Vect}((1, -1)). \end{aligned}$$

Partie 3 – Points extrémaux et diamètre

Partie 3 – Les points réalisant le diamètre sont extrémaux

$\delta(A) = \|b - a\|$ et $\frac{c+d}{2} = a$ impliquent $c = d = a$.

Corrigé – Partie 3.

6. Diamètre.

$A \neq \emptyset$, donc l'ensemble est non vide ; pour $(v, w) \in A^2$, $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq 2R$.

$\{\|v - w\| ; (v, w) \in A^2\}$ est non vide et majoré par $2R$.

7. Extrémalité de a .

a) $a - b = \frac{1}{2}((c - b) + (d - b))$; par l'inégalité triangulaire et la définition de $\delta(A)$:

$$\|a - b\| \leq \frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|) \leq \frac{1}{2}(\delta(A) + \delta(A)) = \|a - b\|.$$

Ainsi $\frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|) = \delta(A)$ avec $\|c - b\| \leq \delta(A)$ et $\|d - b\| \leq \delta(A)$:

$$\|c - b\| = \|d - b\| = \delta(A).$$

b) En développant $\|(c - a) + (a - b)\|^2$:

$$\|c - b\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle c - a, a - b \rangle.$$

Comme $\|c - b\| = \|a - b\| = \delta(A)$:

$$\|c - a\|^2 = -2\langle c - a, a - b \rangle.$$

c) Le même calcul avec d et a) donne :

$$\|d - a\|^2 = -2\langle d - a, a - b \rangle.$$

d) Comme $c + d = 2a$, $d - a = -(c - a)$, donc $\|d - a\| = \|c - a\|$ et c) donne $\|c - a\|^2 = 2\langle c - a, a - b \rangle$. Avec b), $\langle c - a, a - b \rangle = 0$, et $c - d = 2(c - a)$:

$$\langle c - d, a - b \rangle = 0.$$

e) D'après b) et d), $\|c - a\|^2 = 0$, donc $c = a$, puis $d = 2a - c = a$.

$$a = c = d : a \text{ est un point extrémal de } A.$$

Partie 4 – Matrices bistochastiques

Partie 4 – Propriétés de A_n , matrices de permutation et projecteur p

M_σ extrémales, $p = \frac{1}{n!} \sum f_\sigma$ projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(x_0)$.

Corrigé – Partie 4.

8. Premières propriétés de A_n .

- a) Les coefficients de $\frac{1}{2}(M+M')$ sont positifs et ses sommes de lignes (resp. de colonnes) valent $\frac{1}{2}(1+1) = 1$. Transposer échange les conditions sur les lignes et sur les colonnes.

$$\frac{1}{2}(M+M') \in A_n \quad \text{et} \quad {}^tM \in A_n.$$

- b) La i -ème composante de MX_0 est $\sum_j m_{i,j} = 1$:

$$MX_0 = X_0.$$

- c) $MX_0 = X_0$ signifie que chaque ligne de M a pour somme 1 ; ${}^tMX_0 = X_0$ que chaque colonne a pour somme 1. Avec la positivité :

$$M \in A_n.$$

- d) Les coefficients de MM' sont positifs (sommes de produits de réels positifs). $MM'X_0 = MX_0 = X_0$ et ${}^t(MM')X_0 = {}^tM'{}^tMX_0 = {}^tM'X_0 = X_0$ (car ${}^tM, {}^tM' \in A_n$). Par c) :

$$MM' \in A_n.$$

9. Matrices de permutation.

- a)

$$f_{\text{id}} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad M_{\text{id}} = I_n.$$

- b) La colonne j de M_σ est $e_{\sigma(j)}$: le coefficient (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. Chaque colonne contient un seul 1 ; la ligne i contient un seul 1, en colonne $\sigma^{-1}(i)$. Donc $M_\sigma \in A_n$. Le coefficient (i, j) de ${}^tM_\sigma$ vaut 1 si $j = \sigma(i)$, c'est-à-dire $i = \sigma^{-1}(j)$:

$$M_\sigma \in A_n \quad \text{et} \quad {}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}.$$

- c) $f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} = f_{\sigma \circ \sigma'}(e_j)$ pour tout j , d'où l'égalité des applications linéaires. En particulier $M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\text{id}} = I_n$.

$$f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}, \quad M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} = {}^tM_\sigma.$$

- d) D'après b) et c), ${}^tM_\sigma M_\sigma = M_{\sigma^{-1}} M_\sigma = I_n$:

$$M_\sigma \text{ est orthogonale.}$$

- e) D'après b), M_σ a un seul 1 et $n - 1$ zéros sur chaque ligne et chaque colonne. Réciproquement, si M a cette propriété, notons $\sigma(j)$ l'indice de ligne du 1 de la colonne j ; deux colonnes distinctes ne peuvent avoir leur 1 sur la même ligne (chaque ligne n'en a qu'un), donc σ est injective, donc bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même, et $M = M_\sigma$.

$$\{M_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{\text{matrices ayant sur chaque ligne et chaque colonne un 1 et } n - 1 \text{ zéros}\}.$$

10. Extrémalité de M_σ .

Soit $(M, M') \in A_n^2$ avec $\frac{1}{2}(M + M') = M_\sigma$. Là où M_σ a un coefficient nul, $m_{i,j} + m'_{i,j} = 0$ avec $m_{i,j}, m'_{i,j} \geq 0$, donc $m_{i,j} = m'_{i,j} = 0$. Sur la ligne i , le seul coefficient éventuellement non nul de M est donc en colonne $\sigma^{-1}(i)$, et il vaut 1 (somme de la ligne). Ainsi $M = M_\sigma$, et de même $M' = M_\sigma$.

$$M_\sigma \text{ est un point extrémal de } A_n.$$

11. Le projecteur p .

- a) φ_τ est bijective, de réciproque $\varphi_{\tau^{-1}} : \sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma$. Par 9.c) et le changement d'indice $\sigma' = \tau \circ \sigma$:

$$f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{\tau \circ \sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} f_{\sigma'}, \quad \boxed{f_\tau \circ p = p.}$$

- b) $p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_\tau f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \cdot n! p = p$:

$$\boxed{p \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^n.}$$

- c) Si $x = p(y)$, $f_\sigma(x) = f_\sigma \circ p(y) = p(y) = x$. Réciproquement, si $f_\sigma(x) = x$ pour tout σ , $p(x) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma x = x \in \text{Im}(p)$.

$$\boxed{\text{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f_\sigma(x) = x\}.$$

- d) $f_\sigma(x_0) = \sum_j e_{\sigma(j)} = x_0$ (σ bijective), donc $x_0 \in \text{Im}(p)$. Réciproquement, soit $x = \sum_k x_k e_k \in \text{Im}(p)$ et $i \neq j$; pour la transposition τ échangeant i et j , $f_\tau(x)$ s'obtient en échangeant les coordonnées x_i et x_j ; $f_\tau(x) = x$ impose $x_i = x_j$. Toutes les coordonnées sont égales :

$$\boxed{\text{Im}(p) = \text{Vect}(x_0).}$$

- e) $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$, donc ${}^t P = \frac{1}{n!} \sum_\sigma M_{\sigma^{-1}} = P$. La base $\mathcal{B}_0$ étant orthonormale, p est symétrique ; pour $x \in \text{Ker } p$ et $y \in \text{Im } p$, $\langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0$: p est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(x_0)$, donc $p(x) = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 = \frac{1}{n} \left(\sum_i x_i \right) x_0$.

$$\boxed{{}^t P = P, \quad p \text{ projecteur orthogonal}, \quad P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- f) Les coefficients de P valent $\frac{1}{n} \geq 0$ et chaque ligne et chaque colonne a pour somme $n \cdot \frac{1}{n} = 1$:

$$\boxed{P \in A_n.}$$

Partie 4 – Diamètre de A_n , dimension de F_n et caractérisation des points extrémaux
 $\delta(A_n) = \sqrt{2n}$; $\dim F_n = (n-1)^2$; les points extrémaux de A_n sont les M_σ .

Corrigé – Partie 4.
12. Diamètre de A_n .

a) Le coefficient (j, j) de ${}^tMN$ est $\sum_i m_{i,j}n_{i,j}$:

$$\text{Tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}n_{i,j}.$$

b) D'après a), l'application est bilinéaire et symétrique, et $\text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \geq 0$, nul si et seulement si $M = 0$.

$$(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN) \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

c) M_σ contient n coefficients égaux à 1 et les autres nuls :

$$\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{n}.$$

d) $M_\alpha - M_\beta = (\alpha - \beta)(I_2 - J)$ a quatre coefficients égaux à $\pm(\alpha - \beta)$, donc $\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2|\alpha - \beta| \leq 2$, avec égalité pour $\alpha = 1, \beta = 0$.

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2|\alpha - \beta|, \quad \delta(A_2) = 2.$$

e) Pour $M \in A_n$, $0 \leq m_{i,j} \leq 1$ (positifs de somme 1 sur chaque ligne), donc $m_{i,j}^2 \leq m_{i,j}$ et $\|M\|_2^2 \leq \sum_{i,j} m_{i,j} = n$.

$$\|M\|_2^2 \leq n.$$

f) $(M | N) = \sum m_{i,j}n_{i,j} \geq 0$, donc $\|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2 - 2(M | N) \leq 2n$.

$$\forall (M, N) \in A_n^2, \quad \|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}.$$

g) $(M_\sigma | M_\tau)$ est le nombre de j tels que $\sigma(j) = \tau(j)$. Soit c la permutation $j \mapsto j+1$ pour $j < n$, $n \mapsto 1$, et $\tau = \sigma \circ c$. Comme $c(j) \neq j$ et σ est injective, $\tau(j) \neq \sigma(j)$ pour tout j .

$$\tau = \sigma \circ c \text{ vérifie } (M_\sigma | M_\tau) = 0.$$

h) Avec g), $\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = n + n - 0 = 2n$: le majorant de f) est atteint.

$$\delta(A_n) = \sqrt{2n}.$$

A_n est bornée (e) et vérifie (H) avec $a = M_\sigma, b = M_\tau$; d'après la question 7, M_σ est un point extrémal de A_n (ce qui retrouve la question 10).

13. Structure de F_n .

a) F_n est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en les coefficients ($0 \in F_n$, stabilité par combinaison linéaire) :

$$F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

- b) Φ est linéaire. *Injectivité* : si $\Phi(M) = 0$, la ligne $i \leq n-1$ donne $m_{i,n} = 0$, la colonne $j \leq n-1$ donne $m_{n,j} = 0$, puis la ligne n donne $m_{n,n} = 0$: $M = 0$. *Surjectivité* : pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on complète par $m_{i,n} = -\sum_{j < n} b_{i,j}$, $m_{n,j} = -\sum_{i < n} b_{i,j}$ et $m_{n,n} = \sum_{i,j < n} b_{i,j}$; toutes les sommes de lignes et de colonnes sont nulles, donc la matrice obtenue est dans F_n et a pour image B .

$$\Phi \text{ est un isomorphisme et } \dim F_n = (n-1)^2.$$

14. Les points extrémaux de A_n .

- a) D'après la question 4, les points extrémaux de A_2 sont $I_2 = M_{\text{id}}$ et J , matrice de la transposition de $\{1, 2\}$:

$$\mathcal{P}(2) \text{ est vraie.}$$

- b) $\dim H = 2n$ (famille extraite de la base canonique) et $\dim H + \dim F_n = 2n + (n-1)^2 = n^2 + 1 > n^2 = \dim E$. Si $H \cap F_n = \{0\}$, la somme $H + F_n$ serait directe, de dimension $n^2 + 1 > \dim E$: impossible.

$$H \cap F_n \neq \{0_E\}.$$

- c) $N \in H$: ses coefficients sont nuls hors des positions (i_k, j_k) . Soit $\mu = \min_k m_{i_k, j_k} > 0$, $\nu = \max_{i,j} |n_{i,j}| > 0$ et $\varepsilon = \frac{\mu}{\nu}$. Pour $|t| < \varepsilon$: hors des (i_k, j_k) , le coefficient de Q_t est $m_{i,j} \geq 0$; en (i_k, j_k) , il vaut $m_{i_k, j_k} + t n_{i_k, j_k} \geq \mu - |t|\nu > 0$. De plus $N \in F_n$, donc les sommes de lignes et de colonnes de Q_t sont celles de M , égales à 1.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad Q_t \in A_n.$$

- d) Soit $t \in]0, \varepsilon[$. $Q_t, Q_{-t} \in A_n$ et $\frac{1}{2}(Q_t + Q_{-t}) = M$; M étant extrémal, $Q_t = M$, donc $tN = 0$ et $N = 0$: contradiction.

$$M \text{ a au plus } 2n-1 \text{ coefficients non nuls.}$$

- e) Chaque colonne de M , de somme 1, contient au moins un coefficient non nul. Si toutes en contenaient au moins deux, M aurait au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe donc une colonne s avec un seul coefficient non nul, qui vaut la somme de la colonne, soit 1.

$$\exists (r, s), \quad m_{r,s} = 1 \text{ et } m_{i,s} = 0 \text{ pour } i \neq r.$$

- f) La ligne r a des coefficients positifs de somme 1 et $m_{r,s} = 1$:

$$m_{r,j} = 0 \text{ pour tout } j \neq s.$$

- g) Les coefficients de M' sont positifs. Pour une ligne $i \neq r$, sa somme dans M' vaut $1 - m_{i,s} = 1$; pour une colonne $j \neq s$, $1 - m_{r,j} = 1$. Donc $M' \in A_{n-1}$.

Si $M' = \frac{1}{2}(X' + Y')$ avec $X', Y' \in A_{n-1}$, notons X (resp. Y) la matrice de E obtenue en réinsérant la ligne r et la colonne s , avec 1 en position (r, s) et des 0 ailleurs sur cette ligne et cette colonne. Alors $X, Y \in A_n$ et, d'après e) et f), $\frac{1}{2}(X + Y) = M$. M étant extrémal, $X = Y = M$, donc $X' = Y' = M'$.

$$M' \in A_{n-1} \text{ et } M' \text{ est un point extrémal de } A_{n-1}.$$

- h)** Par $\mathcal{P}(n-1)$, M' a un seul 1 et des 0 sur chaque ligne et chaque colonne (9.e). D'après e) et f), M s'en déduit en ajoutant la ligne r et la colonne s qui ne contiennent qu'un 1 en position (r, s) : M a encore exactement un 1 par ligne et par colonne, et des 0 ailleurs. Par 9.e), c'est une matrice de permutation ; $\mathcal{P}(n)$ est vraie et, par récurrence, pour tout $n \geq 2$:

Les points extrémaux de A_n sont exactement les matrices de permutation.
--