

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2017

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels.</i>	2
2	Étude d'un second exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction.</i>	2
3	Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien	3
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.</i>	3
4	Matrices bistochastiques et points extrémaux	3
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	3

Notations et objectifs. Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de E . Un élément a de A est appelé *point extrémal* de A lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \frac{x+y}{2} = a \implies x = y = a.$$

Les deux premières parties permettent de se familiariser avec cette notion. La troisième partie établit que les points d'une partie qui réalisent son diamètre sont extrémaux. Enfin, on étudie des propriétés des matrices de permutation, notamment leur isobarycentre, et l'on montre que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

1 Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$

Thèmes abordés : espaces vectoriels.

1. On prend ici $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$. Montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.
2. On considère maintenant $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$. Montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

2 Étude d'un second exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble

$$A_2 = \left\{ M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha \in [0, 1] \right\},$$

et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Description et propriétés des éléments de A_2 .

- a) Vérifier que $A_2 = \{\alpha I_2 + (1-\alpha)J \mid \alpha \in [0, 1]\}$.
- b) Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A_2^2$. Montrer que $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) \in A_2$.
- c) Déterminer les éléments M_α de A_2 qui sont inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de $\alpha \in [0, 1]$ on a $(M_\alpha)^{-1} \in A_2$.

4. Points extrémaux de A_2 .

- a) Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2 .
- b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Vérifier que $M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J)$. En déduire que M_α n'est pas extrémal.
- c) Par une méthode similaire, montrer que si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, M_α n'est pas extrémal.

5. Réduction simultanée des matrices de A_2 .

- a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice J .
- b) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $P^{-1}M_\alpha P = D_\alpha$ soit diagonale. Préciser P et D_α .
- c) On note u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique. Déterminer les réels $\alpha \in]0, 1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Préciser l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

3 Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.

On suppose dans cette partie que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On considère une partie non vide A de E vérifiant : il existe un réel $R \geq 0$ tel que, pour tout vecteur $v \in A$, $\|v\| \leq R$.

6. Montrer que l'ensemble $\{\|v - w\| \mid (v, w) \in A^2\}$ est une partie non vide et majorée. Cet ensemble admet donc une borne supérieure. On la note

$$\delta(A) = \sup\{\|v - w\| \mid (v, w) \in A^2\},$$

et on l'appelle le diamètre de A .

Dans la suite de cette partie, on suppose que A vérifie la propriété

$$(H) \quad \exists (a, b) \in A^2 \quad \text{tel que} \quad \delta(A) = \|b - a\|.$$

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A .

7. On considère donc $(c, d) \in A^2$ tels que $\frac{c+d}{2} = a$.
- Vérifier que $\|a - b\| \leq \frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|) \leq \|a - b\|$. En déduire que $\|c - b\| = \|d - b\| = \delta(A)$.
 - Vérifier que $\|c - b\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle c - a, a - b \rangle$. En déduire que $\|c - a\|^2 = -2\langle c - a, a - b \rangle$.
 - Montrer de même que $\|d - a\|^2 = -2\langle d - a, a - b \rangle$.
 - Montrer alors que $c - d$ et $a - b$ sont orthogonaux.
 - En déduire que a , c et d sont égaux. Conclure.

4 Matrices bistochastiques et points extrémaux

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Dans toute la suite, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit les ensembles

$$A_n = \left\{ M = (m_{i,j}) \in E \left| \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0, \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1 \end{array} \right. \right\},$$

l'ensemble des matrices bistochastiques de E , et

$$F_n = \left\{ M = (m_{i,j}) \in E \left| \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0 \right. \right\}.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Enfin, $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

8. Premières propriétés de A_n .

- a) Soit $(M, M') \in A_n^2$. Montrer que $\frac{1}{2}(M + M') \in A_n$ et que ${}^tM \in A_n$.
- b) On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1.
1. Soit $M \in A_n$. Montrer que $MX_0 = X_0$.
- c) Réciproquement, soit $M \in E$ dont tous les coefficients sont positifs et vérifiant $MX_0 = X_0$ et ${}^tMX_0 = X_0$. Montrer que $M \in A_n$.
- d) Soit $(M, M') \in A_n^2$. Montrer que $MM' \in A_n$.

9. Endomorphismes et matrices de permutation. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même. On rappelle que son cardinal est $n!$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et M_σ sa matrice dans $\mathcal{B}_0$, appelée matrice de permutation associée à σ .

- a) Si σ est l'identité de $\llbracket 1, n \rrbracket$, que sont f_σ et M_σ ?
- b) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $M_\sigma \in A_n$. Déterminer $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que ${}^tM_\sigma = M_\tau$.
- c) Soit $(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$. Montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$. En déduire que M_σ est inversible et déterminer son inverse.
- d) Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.
- e) Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne un 1 et $n - 1$ fois 0.

10. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que M_σ est un point extrémal de A_n .

11. Étude d'un projecteur. On note

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} M_\sigma.$$

- a) Soit τ fixé dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'application $\varphi_\tau : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Montrer alors que $f_\tau \circ p = p$.
- b) En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
- c) Montrer que $\text{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f_\sigma(x) = x\}$.
- d) Montrer alors que $\text{Im}(p) = \text{Vect}(X_0)$, où $X_0 = \sum_{i=1}^n e_i$.
- e) Calculer tP et en déduire que p est un projecteur orthogonal. Déterminer alors P .
- f) Vérifier que $P \in A_n$.

12. Diamètre de A_n .

- a) Si $M = (m_{i,j}) \in E$ et $N = (n_{i,j}) \in E$, calculer $\text{Tr}({}^tMN)$.
- b) Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E . Si $(M, N) \in E^2$, on note $(M \mid N) = \text{Tr}({}^tMN)$ ce produit scalaire, et $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$ la norme associée.
- c) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\|M_\sigma\|_2$.
- d) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A_2^2$. Calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.
- e) On revient au cas général, avec $n \geq 2$. Soit $M \in A_n$. Montrer que $\|M\|_2^2 \leq n$.

- f) Montrer alors que, pour tout $(M, N) \in A_n^2$, $\|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$.
- g) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Construire $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(M_\sigma \mid M_\tau) = 0$.
- h) En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n .

13. Structure et dimension de F_n .

- a) Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E .
- b) Soit $\Phi : F_n \longrightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $M = (m_{i,j}) \in F_n$, associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2}$. Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de F_n .

14. Les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n . On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : *si M est un point extrémal de A_n , alors M est une matrice de permutation*.

- a) Vérifier, à l'aide de l'étude du second exemple, que la proposition $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.

On considère un entier $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$ soit réalisée et une matrice $M = (m_{i,j}) \in E$, point extrémal de A_n . On suppose d'abord que M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k, j_k} soit non nul. On pose alors

$$H = \text{Vect}(E_{i_k, j_k} \mid k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket),$$

où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ sont les matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les matrices dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui d'indices (i, j) qui vaut 1.

- b) Montrer que $H \cap F_n \neq \{0_E\}$.
- c) On prend N non nul dans $H \cap F_n$ et, pour tout réel t , on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $Q_t \in A_n$.
- d) En considérant $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t} , montrer qu'on aboutit à une contradiction. On a donc prouvé que M a au plus $2n-1$ coefficients non nuls.
- e) Montrer qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un seul terme non nul, et que ce terme vaut 1. On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice tel que $m_{r,s} = 1$.
- f) Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.
- g) On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r . Montrer que $M' \in A_{n-1}$ et que M' est un point extrémal de A_{n-1} .
- h) En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n .