HEC Paris – ESSEC

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Partie I – Les polynômes $B_{n,k}$ et l'endomorphisme T_n

$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$, $T_n(P) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$.

Corrigé – Partie I.

1. Le cas $n = 2$.

a) $B_{2,0} = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$, $B_{2,1} = 2X(1-X) = 2X - 2X^2$ et $B_{2,2} = X^2$. En plaçant en colonnes les coordonnées dans $\mathcal{C}_2$:

$$\boxed{K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b) K_2 est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible : la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est libre et formée de $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs.

$$\boxed{(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

c) On a $T_2(P) = P(0)B_{2,0} + P\left(\frac{1}{2}\right)B_{2,1} + P(1)B_{2,2}$, donc

$$\begin{aligned} T_2(A_0) &= (1-X)^2 + 2X(1-X) + X^2 = \big((1-X)+X\big)^2 = 1, \\ T_2(A_1) &= \tfrac{1}{2} \cdot 2X(1-X) + X^2 = X, \\ T_2(A_2) &= \tfrac{1}{4} \cdot 2X(1-X) + X^2 = \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}X^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{T_2(A_0) = A_0, \quad T_2(A_1) = A_1, \quad T_2(A_2) = \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

H_2 est triangulaire : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\mathrm{Sp}(T_2) = \{1, \frac{1}{2}\}$.

Pour $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $(H_2 - I_3)V = 0 \iff \frac{c}{2} = 0 \iff c = 0$; $(H_2 - \frac{1}{2}I_3)V = 0 \iff$ $a = 0$ et $b + c = 0$.

$$\boxed{E_1(T_2) = \mathrm{Vect}(1, X), \qquad E_{1/2}(T_2) = \mathrm{Vect}(X^2 - X).}$$

2. Cas général.

a) Le coefficient de plus bas degré de $B_{n,k}$ est celui de X^k, égal à $\binom{n}{k} \neq 0$: $B_{n,k} = \binom{n}{k}X^k + (\text{termes de degré} > k)$.
Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k B_{n,k} = 0$ avec les λ_k non tous nuls, et soit k_0 le plus petit indice tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$. Le coefficient de X^{k_0} dans $\sum_{k\geq k_0} \lambda_k B_{n,k}$ vaut $\lambda_{k_0}\binom{n}{k_0} \neq 0$ (les $B_{n,k}$, $k > k_0$, n'ont pas de terme de degré k_0) : contradiction. La famille est libre, de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{(B_{n,0}, \dots, B_{n,n}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + Q)(\frac{k}{n}) = \lambda P(\frac{k}{n}) + Q(\frac{k}{n})$, donc T_n est linéaire, et $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Si $T_n(P) = 0$, comme $(B_{n,k})$ est une base, $P(\frac{k}{n}) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg P \leq n$, donc $P = 0$. Ainsi T_n est injectif, donc bijectif ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie).

$$\boxed{T_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

c) Par la formule du binôme, $T_n(A_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \big(X + (1-X)\big)^n = 1$.
Pour $k \geq 1$, $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, donc

$$\begin{aligned} T_n(A_1) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= X\big(X + (1-X)\big)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n(A_0) = A_0, \qquad T_n(A_1) = A_1.}$$

d) Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $T_n(A_k)$ est de degré k, de coefficient dominant $\alpha_k > 0$. C'est vrai pour $k = 0$ ($T_n(A_0) = 1$). Si c'est vrai au rang $k \leq n-1$, écrivons $T_n(A_k) = \alpha_k X^k + R$ avec $\deg R < k$. Dans la relation admise, $\frac{1}{n}X(1-X)(T_n(A_k))'$ et $X\,T_n(A_k)$ sont de degré au plus $k+1$, et le coefficient de X^{k+1} de $T_n(A_{k+1})$ vaut

$$-\frac{1}{n} \cdot k\alpha_k + \alpha_k = \alpha_k\Big(1 - \frac{k}{n}\Big) > 0 \quad (\text{car } k \leq n-1).$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg T_n(A_k) = k.}$$

e) D'après d), $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{k+1} = (1 - \frac{k}{n})\alpha_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'où

$$\boxed{\alpha_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}.}$$

Comme $T_n(A_k) \in \mathrm{Vect}(A_0, \dots, A_k)$, la matrice de T_n dans $\mathcal{C}_n$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, qui sont donc les valeurs propres de T_n. On a $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ et, pour $1 \leq k \leq n-1$, $0 < \alpha_{k+1} = (1 - \frac{k}{n})\alpha_k < \alpha_k$: les réels $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.
D'après c), $E_1(T_n) \supset \mathrm{Vect}(A_0, A_1)$, de dimension ≥ 2 ; pour $2 \leq k \leq n$, $\dim E_{\alpha_k}(T_n) \geq 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc au moins $2 + (n-1) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ (pour $n = 1$, $T_1 = \mathrm{Id}$).

$$\boxed{T_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Partie I – Approximation par les polynômes de Bernstein – Python

$f_n(z) = \mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) \to f(z)$.

Corrigé – Partie I.

3. Convergence de $f_n(z)$.

a) $\mathbb{E}(\overline{Z}_n) = \frac{nz}{n} = z$ et $\mathbb{V}(\overline{Z}_n) = \frac{nz(1-z)}{n^2} = \frac{z(1-z)}{n}$. Pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(|\overline{Z}_n - z| \geq \varepsilon) \leq \frac{z(1-z)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} z.}$$

b) $|f|$ est continue sur le fermé borné $[0,1]$; par le théorème des bornes atteintes,

$$\boxed{M = \max_{[0,1]} |f| \text{ existe.}}$$

c) $\overline{Z}_n$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, donc $|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leq |f(\overline{Z}_n)| + |f(z)| \leq 2M$. Sur U_n, on a donc $|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leq 2M$; sur $\overline{U_n}$, $|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leq \varepsilon$. Comme $\mathbf{1}_{U_n} + \mathbf{1}_{\overline{U_n}} = 1$:

$$\boxed{|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leq 2M\,\mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon\,\mathbf{1}_{\overline{U_n}}.}$$

d) f est continue en z : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y \in [0,1]$, $|y - z| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$. Ainsi $U_n \subset [|\overline{Z}_n - z| \geq \eta]$ et, d'après a), $\mathbb{P}(U_n) \to 0$. Par croissance et linéarité de l'espérance (variables finies), c) donne

$$|\mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) - f(z)| \leq \mathbb{E}(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) \leq 2M\,\mathbb{P}(U_n) + \varepsilon\,\mathbb{P}(\overline{U_n}) \leq 2M\,\mathbb{P}(U_n) + \varepsilon.$$

Il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$, $2M\mathbb{P}(U_n) \leq \varepsilon$, et alors $|\mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) - f(z)| \leq 2\varepsilon$. Donc $\mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) \to f(z)$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = f_n(z).$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(\overline{Z}_n)) = f(z) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z).}$$

4. Python.

a) Il suffit d'utiliser le simulateur de la loi binomiale :

```
def binom(n, z):
    Z = rd.binomial(n, z)
    return Z
```

b) Le programme calcule la moyenne de $N = 1000$ réalisations indépendantes de $f(\overline{Z}_{100})$, avec $z = 0{,}4$.
D'après la loi faible des grands nombres, cette moyenne empirique approche $\mathbb{E}(f(\overline{Z}_{100})) = f_{100}(0{,}4)$ (méthode de Monte-Carlo) ; d'après la question 3, $f_{100}(0{,}4)$ est elle-même une approximation de $f(0{,}4)$ (approximation par les polynômes de Bernstein).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Valeur approchée de } f(0{,}4) = -0{,}4\ln(0{,}4) \simeq 0{,}37 \\ \text{(méthode de Monte-Carlo via la LFGN et approximation de Bernstein).}\end{array}}$$

Partie II – Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Partie II – Interpolation de Lagrange et erreur d'interpolation

$\Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n))$, base (L_i), $f - P_f = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} w$.

Corrigé – Partie II.

5. L'isomorphisme Φ.

a) Φ est linéaire (l'évaluation en un point est linéaire). Si $\Phi(P) = 0$, P admet les $n+1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$ et $\deg P \leq n$, donc $P = 0$: Φ est injective. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

b) Notons $M_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$ (dénominateurs non nuls). M_i est de degré n, $M_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$ (facteur $X - x_j$) et $M_i(x_i) = 1$. Donc $\Phi(M_i) = e_i = \Phi(L_i)$, et par injectivité de Φ :

$$\boxed{L_i(X) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.}$$

c) Ψ est symétrique, et linéaire par rapport à la première variable (donc bilinéaire). $\Psi(P, P) = \sum_k P(x_k)^2 \geq 0$, et si $\Psi(P, P) = 0$, alors $P(x_k) = 0$ pour tout k, donc $P = 0$ comme en a). Ψ est un produit scalaire.
Comme $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ (symbole de Kronecker), $\Psi(L_i, L_j) = \sum_k \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}$: la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée, donc libre, de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\Psi \text{ est un produit scalaire et } (L_0, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$$

d) Dans une base orthonormée, $X^j = \sum_{i=0}^n \Psi(X^j, L_i) L_i$ et $\Psi(X^j, L_i) = \sum_k x_k^j L_i(x_k) = x_i^j$. La colonne j de A contient les coordonnées de X^j dans (L_i) :

$$\boxed{A = (x_i^j)_{0 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.}$$

e) Les conditions s'écrivent $\Phi(P_f) = (f(x_0), \dots, f(x_n))$; Φ étant bijective, il existe un unique tel polynôme. Comme $(f(x_0), \dots, f(x_n)) = \sum_i f(x_i) e_i = \Phi(\sum_i f(x_i) L_i)$:

$$\boxed{P_f = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i.}$$

6. Erreur d'interpolation.

a) $Q_f - P_f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ s'annule en $x_0, \dots, x_n$ (deux à deux distincts), donc est divisible par w, de degré $n + 1$: $Q_f - P_f = w \times R$ avec $\deg R \leq 0$, c'est-à-dire R constant égal à un réel δ.

$$\boxed{\exists\, \delta \in \mathbb{R},\ \forall t \in [a, b], \quad Q_f(t) - P_f(t) = \delta\, w(t).}$$

b) $h(x_k) = f(x_k) - Q_f(x_k) = 0$ et $h(\overline{x}) = 0$ par définition de Q_f : h s'annule en $n+2$ points distincts de $[a,b]$. h est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. En appliquant le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs, h' s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $]a,b[$; par récurrence, $h^{(j)}$ s'annule en au moins $n+2-j$ points distincts de $]a,b[$ pour $j \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\boxed{\exists\, \theta \in]a,b[, \quad h^{(n+1)}(\theta) = 0.}$$

c) $Q_f = P_f + \delta w$ avec $\deg P_f \leq n$ et w unitaire de degré $n+1$, donc $Q_f^{(n+1)} = \delta\,(n+1)!$ et $h^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - \delta\,(n+1)! = 0$. Ainsi $\delta = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$, et comme $Q_f(\overline{x}) = f(\overline{x})$, a) en $t = \overline{x}$ donne :

$$\boxed{f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)\, w(\overline{x}).}$$

d) $f^{(n+1)}$ est continue sur le fermé borné $[a,b]$, donc bornée (bornes atteintes). Si $t \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$, c) avec $\overline{x} = t$ donne $|f(t) - P_f(t)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta)|}{(n+1)!}|w(t)| \leq \frac{|w(t)|}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$. Si $t = x_k$, les deux membres sont nuls.

$$\boxed{\forall t \in [a,b], \quad |f(t) - P_f(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|w(t)| \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.}$$

Partie III – Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

Partie III – Une condition suffisante de convergence

Dérivées de f_ρ, majoration de $|w_n|$ et convergence pour $\rho > 1 + \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Corrigé – Partie III.

7. Régularité de f_ρ.

a) $x \mapsto x^2 + \rho^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ($\rho > 0$) ; par quotient :

$$\boxed{f_\rho \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) f_ρ est paire : $f_\rho(x) = f_\rho(-x)$. En dérivant n fois (récurrence immédiate), $f_\rho^{(n)}(x) = (-1)^n f_\rho^{(n)}(-x)$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|.}$$

c) Pour $|x| < \rho$, $q = -\frac{x^2}{\rho^2} \in]-1, 0]$, donc la série géométrique $\sum q^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k} = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\rho^2}}, \qquad \boxed{\frac{1}{x^2 + \rho^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k}.}$$

8. Majoration des dérivées.

a) Pour $x \in]-\rho, \rho[$, $\frac{p}{\rho - x} + \frac{q}{\rho + x} = \frac{(p+q)\rho + (p-q)x}{\rho^2 - x^2}$. L'égalité avec $v(x)$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$ équivaut à $(p-q)x + (p+q)\rho - \rho^2 = 0$ pour une infinité de x, soit $p - q = 0$ et $(p+q)\rho = \rho^2$.

$$\boxed{p = q = \frac{\rho}{2}.}$$

b) v est paire ; comme en 7.b), $v^{(n)}(x) = (-1)^n v^{(n)}(-x)$:

$$\boxed{|v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(-x)|.}$$

c) Par récurrence, $\left(\frac{1}{\rho - x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}}$ et $\left(\frac{1}{\rho + x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\rho + x)^{n+1}}$. Avec a) :

$$\boxed{v^{(n)}(x) = \frac{\rho\, n!}{2} \left(\frac{1}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(\rho + x)^{n+1}} \right).}$$

d) Si $\rho > 1$ et $x \in [-1, 1] \subset]-\rho, \rho[$, alors $\rho - x \geq \rho - 1 > 0$ et $\rho + x \geq \rho - 1 > 0$, donc d'après c)

$$|v^{(n)}(x)| \leq \frac{\rho\, n!}{2} \cdot \frac{2}{(\rho - 1)^{n+1}} = \frac{\rho\, n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

Avec le résultat admis :

$$\boxed{|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.}$$

9. Majoration de $|w_n|$.

a) Pour $j \leq k$: $0 < x - x_{j,n} < x_{k+1,n} - x_{j,n} = \frac{2}{n}(k+1-j)$; pour $j \geq k+1$: $0 < x_{j,n} - x < x_{j,n} - x_{k,n} = \frac{2}{n}(j-k)$. Donc

$$|w_n(x)| \leq \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} \prod_{j=0}^{k}(k+1-j) \prod_{j=k+1}^{n}(j-k) = \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1}(k+1)!\,(n-k)!.$$

Ensuite $(k+1)!\,(n-k)! = (k+1)\frac{n!}{\binom{n}{k}}$ et, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} \geq \binom{k+1}{k} = k+1$ (la suite $m \mapsto \binom{m}{k}$ est croissante d'après la formule de Pascal). Ainsi $(k+1)!\,(n-k)! \leq n!$.

$$\boxed{|w_n(x)| \leq \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1}(k+1)!\,(n-k)! \leq \Big(\frac{2}{n}\Big)^{n+1} n!.}$$

b) Par la formule de Stirling,

$$\frac{(2/n)^{n+1}n!}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^{n+1}n!}{n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{n+1}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^{n+1}} = \frac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il existe donc n_0 tel que pour $n \geq n_0$, ce quotient est ≤ 1. Avec a) (et $w_n(x) = 0$ si x est l'un des $x_{k,n}$) :

$$\boxed{\exists\, n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [-1,1], \quad |w_n(x)| \leq \Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^{n+1}.}$$

c) Supposons $\rho > 1 + \frac{2}{\mathrm{e}}$ (donc $\rho > 1$). Pour $n \geq n_0$ et $x \in [-1,1]$, 6.d) sur $[a,b] = [-1,1]$, 9.b) et 8.d) (au rang $n+1$) donnent

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^{n+1} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}} = \frac{1}{\rho(\rho-1)}\Big(\frac{2}{\mathrm{e}(\rho-1)}\Big)^{n+1}.$$

Comme $0 < \frac{2}{\mathrm{e}(\rho-1)} < 1$, le majorant tend vers 0 ; par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\rho > 1 + \frac{2}{\mathrm{e}} \implies \forall x \in [-1,1],\ \lim_{n\to+\infty} |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| = 0.}$$

Partie III – La fonction H et le phénomène de Runge

$H(\rho) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$, ρ_0, $\Omega_n(\rho)$ et divergence pour $0 < \rho < \rho_0$.

Corrigé – Partie III.

10. La fonction H.

a) On intègre par parties sur le segment $[-1,1]$ avec $u(t) = \ln(t^2+\rho^2)$ et $v(t) = t$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(t) = \frac{2t}{t^2+\rho^2}$, $v'(t) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t &= \big[t\ln(t^2+\rho^2)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2t^2}{t^2+\rho^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\ln(1+\rho^2) - 2\int_{-1}^{1}\Big(1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\Big)\mathrm{d}t \\ &= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 2\rho^2\Big[\frac{1}{\rho}\arctan\frac{t}{\rho}\Big]_{-1}^{1} \\ &= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 4\rho\arctan\frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

$$\boxed{H(\rho) = \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\arctan\Big(\frac{1}{\rho}\Big).}$$

Comme $0 \le \rho\arctan\frac{1}{\rho} \le \frac{\pi\rho}{2} \to 0$ quand $\rho \to 0^+$, $H(\rho) \to -1$:

$$\boxed{H \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant } H(0) = -1.}$$

b) H est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ avec

$$H'(\rho) = \frac{\rho}{1+\rho^2} + \arctan\frac{1}{\rho} + \rho\cdot\frac{-1/\rho^2}{1+1/\rho^2} = \arctan\frac{1}{\rho} > 0.$$

H est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $0 \le \rho\arctan\frac{1}{\rho} \le \rho\cdot\frac{1}{\rho} = 1$ (car $\arctan u \le u$ pour $u \ge 0$) et $\ln(1+\rho^2) \to +\infty$, donc $H(\rho) \to +\infty$. Par le théorème de la bijection :

$$\boxed{H \text{ réalise une bijection strictement croissante de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } [-1,+\infty[.}$$

c) $\ln 2 - 1 \in]-1,+\infty[$, donc il existe un unique $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$, et $\rho_0 \neq 0$ car $H(0) = -1 \neq \ln 2 - 1$. Enfin $H(1) - (\ln 2 - 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 > 0{,}78 - 0{,}35 > 0$, donc $H(\rho_0) < H(1)$ et, H étant strictement croissante :

$$\boxed{\exists!\,\rho_0 > 0,\ H(\rho_0) = \ln 2 - 1, \qquad \rho_0 < 1.}$$

d) Chaque facteur $\sqrt{x_{k,n}^2 + \rho^2}$ est strictement positif ($\rho > 0$), donc $\Omega_n(\rho) > 0$. Notons $g(t) = \ln(t^2+\rho^2)$, continue sur $[-1,1]$. Alors

$$\frac{1}{n}\ln\Omega_n(\rho) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} g\Big(-1 + \frac{2k}{n}\Big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(-1 + k\frac{2}{n}\Big) + \frac{g(1)}{2n}.$$

Le premier terme est une somme de Riemann de g sur $[-1,1]$: par le théorème sur les sommes de Riemann, il tend vers $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = H(\rho)$, et $\frac{g(1)}{2n} \to 0$.

$$\boxed{\Omega_n(\rho) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\Omega_n(\rho) = H(\rho).}$$

11. Recherche de ρ_0 en Python.

a) Pour $x>0$, $\mathtt{G}(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln 2+x\arctan\frac{1}{x}=H(x)+1-\ln 2$. G est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus $G(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2>0$ et, comme $\arctan 4<\frac{\pi}{2}$ et $\ln(1+u)\leq u$, $H(0{,}25)\leq\frac{0{,}0625}{2}-1+\frac{\pi}{8}<-0{,}5$, donc $G(0{,}25)<0$. Le programme maintient $G(u)\leq 0\leq G(v)$ en divisant par deux la longueur de $[u,v]$ à chaque étape, jusqu'à ce qu'elle soit inférieure à 0,001 : c'est la méthode de dichotomie, et le milieu affiché approche à 0,001 près le zéro de G dans $[0{,}25;1]$.

$$\boxed{\text{Méthode de dichotomie ;}\quad G(s_0)=0,\ \text{soit}\ \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+s_0^2}{4}\Big)+s_0\arctan\Big(\frac{1}{s_0}\Big)=0.}$$

b) $G(s_0)=0\iff H(s_0)=\ln 2-1$, et ρ_0 est l'unique solution de cette équation (10.c).

$$\boxed{s_0=\rho_0\ (\simeq 0{,}526).}$$

12. Le polynôme S_n.

a) Pour tout k, $S_n(x_{k,n})=1-(x_{k,n}^2+\rho^2)f_\rho(x_{k,n})=0$. S_n admet les $n+1$ racines distinctes $x_{0,n},\dots,x_{n,n}$:

$$\boxed{w_n\text{ divise }S_n.}$$

b) Soit $Q(X)=P_{f_\rho,n}(-X)\in\mathbb{R}_n[X]$. Comme $x_{n-k,n}=1-\frac{2k}{n}=-x_{k,n}$ et f_ρ est paire,

$$Q(x_{k,n})=P_{f_\rho,n}(x_{n-k,n})=f_\rho(x_{n-k,n})=f_\rho(-x_{k,n})=f_\rho(x_{k,n}).$$

Par unicité du polynôme d'interpolation (5.e), $Q=P_{f_\rho,n}$.

$$\boxed{P_{f_\rho,n}\text{ est pair.}}$$

c) $y_n-x_{k,n}=\frac{2(n-k)-1}{n}$, donc, en posant $j=n-k$,

$$|w_n(y_n)|=\frac{1}{n^{n+1}}\prod_{j=0}^{n}|2j-1|=\frac{1}{n^{n+1}}\prod_{j=1}^{n}(2j-1)=\frac{1}{n^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!}{\prod_{j=1}^{n}(2j)},$$

$$\boxed{|w_n(y_n)|=\frac{(2n)!}{2^n\,n!\,n^{n+1}}.}$$

Par la formule de Stirling, $(2n)!\sim(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4\pi n}$ et $n!\sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

$$|w_n(y_n)|\sim\frac{4^n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\,2\sqrt{\pi n}}{2^n\,n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,n^{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{n}\Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^n,$$

$$\boxed{|w_n(y_n)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{n}\Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^n\quad(\tau=\sqrt{2},\ \sigma=\tfrac{2}{\mathrm{e}}).}$$

d) Posons $\varepsilon_n=\ln\Omega_n(\rho)-nH(\rho)-\frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\to 0$. Alors $\Omega_n(\rho)=\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{e}^{nH(\rho)}\mathrm{e}^{\varepsilon_n}\sim\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{e}^{nH(\rho)}$. Avec c), par quotient d'équivalents :

$$\boxed{\frac{|w_n(y_n)|}{\Omega_n(\rho)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{1+\rho^2}}\,\mathrm{e}^{n(\ln 2-1-H(\rho))}.}$$

13. Cas n impair.

a) On a vu $x_{n-k,n} = -x_{k,n}$. Comme n est impair, $k \neq n-k$ pour tout k, et les indices se regroupent en paires $\{k, n-k\}$ avec $k \in [\![0, \frac{n-1}{2}]\!]$:

$$w_n(X) = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} (X - x_{k,n})(X + x_{k,n}), \qquad \boxed{w_n(X) = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} (X^2 - x_{k,n}^2).}$$

De même, $\Omega_n(\rho) = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} \sqrt{x_{k,n}^2 + \rho^2}\sqrt{x_{n-k,n}^2 + \rho^2} = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} (x_{k,n}^2 + \rho^2)$, et

$$|W_n(-\rho^2)| = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} |-\rho^2 - x_{k,n}^2| = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} (x_{k,n}^2 + \rho^2), \qquad \boxed{|W_n(-\rho^2)| = \Omega_n(\rho).}$$

b) Écrivons $P_{f_\rho,n} = \sum_j a_j X^j$. Comme $P_{f_\rho,n}(-X) = P_{f_\rho,n}(X)$ (12.b), $a_j = 0$ pour j impair ; n étant impair, les puissances paires sont $\leq n-1$. Ainsi $P_{f_\rho,n}(X) = Q_n(X^2)$ avec $Q_n = \sum_{m=0}^{(n-1)/2} a_{2m} X^m$, de degré $\leq \frac{n-1}{2}$.
Alors $S_n(X) = T(X^2)$ avec $T(Y) = 1 - (Y + \rho^2)Q_n(Y)$, de degré $\leq \frac{n+1}{2}$. Pour $k \in [\![0, \frac{n-1}{2}]\!]$, $T(x_{k,n}^2) = S_n(x_{k,n}) = 0$ (12.a), et les réels $x_{k,n}^2$ sont deux à deux distincts (les $x_{k,n}$, $k \leq \frac{n-1}{2}$, sont strictement négatifs et distincts). T est donc divisible par W_n, unitaire de degré $\frac{n+1}{2}$: $T = c\,W_n$ avec $c \in \mathbb{R}$. En $Y = -\rho^2$: $1 = T(-\rho^2) = c\,W_n(-\rho^2)$, avec $W_n(-\rho^2) \neq 0$ d'après a).

$$\boxed{S_n(X) = \frac{W_n(X^2)}{W_n(-\rho^2)} = \frac{w_n(X)}{W_n(-\rho^2)}.}$$

c) Pour x réel, $f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = \dfrac{1 - (x^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(x)}{x^2+\rho^2} = f_\rho(x)S_n(x) = f_\rho(x)\dfrac{w_n(x)}{W_n(-\rho^2)}$. Avec a) et $f_\rho > 0$:

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| = f_\rho(x)\,\frac{|w_n(x)|}{\Omega_n(\rho)}.}$$

14. Phénomène de Runge ($0 < \rho < \rho_0$, n impair).

a) D'après 13.c) et 12.d), et puisque $f_\rho(y_n) \to f_\rho(1) = \frac{1}{1+\rho^2}$ (continuité),

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| = f_\rho(y_n)\frac{|w_n(y_n)|}{\Omega_n(\rho)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{(1+\rho^2)^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{nc}}{n},$$

où

$$c = \ln 2 - 1 - H(\rho) = H(\rho_0) - H(\rho).$$

Comme H est strictement croissante et $\rho < \rho_0$, $c > 0$, et $\frac{\mathrm{e}^{nc}}{n} \to +\infty$ par croissances comparées.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} |f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| = +\infty.}$$

b) $y_n \in [0,1[\subset [-1,1]$, donc $\sup_{[-1,1]} |f_\rho - P_{f_\rho,n}| \geq |f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)|$. Par comparaison avec a) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| = +\infty.}$$