

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2017

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Quelques propriétés des polynômes de Bernstein	2
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.</i>	2
2	Les polynômes d'interpolation de Lagrange	3
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions d'une variable. .</i>	3
3	Exemple d'interpolation et phénomène de Runge	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; Python.</i>	4

Dans tout le problème, pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ avec la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, avec la convention $0^0 = 1$. On rappelle la formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Le problème a pour objet l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales. Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein. Les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

1 Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Thèmes abordés : applications linéaires ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $A_k = X^k$, et on note $\mathcal{C}_n = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit T_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$(T_n(P))(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X).$$

1. Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.
 - a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathcal{C}_2$.
 - b) En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - c) Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$; déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base $\mathcal{C}_2$. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de T_2 .
2. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.
 - a) Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre ; en déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b) Montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.
 - d) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k . Pour établir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivante, que l'on ne demande pas de démontrer : pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$(T_n(A_{k+1}))(X) = \frac{1}{n} X(1-X)(T_n(A_k))'(X) + X(T_n(A_k))(X),$$

où $(T_n(A_k))'$ est le polynôme dérivé de $T_n(A_k)$.

- e) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit α_k le coefficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et n . L'automorphisme T_n est-il diagonalisable ?
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in [0, 1]$,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z).$$

Soit $z \in [0, 1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace suivant la loi binomiale de paramètres n et z . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{Z}_n = Z_n/n$.

- Montrer que la suite de variables aléatoires $(\bar{Z}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers le réel z .
- Justifier l'existence de $M = \max_{[0,1]} |f|$.
- Soit ε un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit U_n l'événement $[|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon]$. On note $\mathbf{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'événement U_n et $\bar{U}_n$ l'événement contraire de U_n . Établir l'inégalité :

$$|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq 2M\mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon\mathbf{1}_{\bar{U}_n}.$$

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = f(z)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$.
4. a) Écrire une fonction Python `binom(n, z)` qui renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et z .
- b) Soient une fonction Python `f` et une variable z définies par :

```
import numpy as np

def f(x):
    return -x * np.log(x) if x != 0 else 0

z = 0.4
```

On considère le code Python suivant :

```
n = 100
N = 1000
S = 0
for k in range(N):
    S = S + f(binom(n, z) / n)
resultat = S / N
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ? Cette valeur affichée est le résultat de la mise en œuvre de certaines méthodes. Lesquelles ?

2 Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; fonctions d'une variable.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$.
- Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

- c) Soit Ψ l'application définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$,

$$\Psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k).$$

Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire. Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

- d) Expliciter la matrice A de passage de la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ à la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- e) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_f , vérifiant les relations $P_f(x_0) = f(x_0)$, $P_f(x_1) = f(x_1)$, $\dots$, $P_f(x_n) = f(x_n)$. On dit que P_f est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$. Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.
6. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) tels que $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et x un réel de $[a, b]$ différent de $x_0, x_1, \dots, x_n$. On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$, et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n, x$. On pose $w(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$.
- a) Établir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a, b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta w(t)$.
- b) Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par $h(t) = f(t) - Q_f(t)$. Montrer que la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ et en déduire l'existence d'un réel $\theta \in [a, b]$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.
- c) Établir l'égalité : $f(x) - P_f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) w(x)$.
- d) En déduire que pour tout $t \in [a, b]$, on a : $|f(t) - P_f(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |w(t)| \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

3 Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; Python.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n appartient à $\mathbb{N}^*$ et n'est plus fixé. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $x_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}$. Pour tout réel $\rho > 0$, on note f_ρ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\rho(x) = \frac{1}{x^2 + \rho^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho > 0$, on note $P_{f_\rho, n}$ le polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ de la fonction f_ρ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_{k,n})$.

Cette partie se propose de mettre en évidence des conditions suffisantes de convergence de la suite $(P_{f_\rho, n}(x))_{n \geq 1}$ vers $f_\rho(x)$ pour x appartenant à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

7. a) Justifier que la fonction f_ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$.
- c) Montrer que, pour tout entier naturel p et tout réel x vérifiant $|x| < \rho$, on a :

$$\frac{1}{x^2 + \rho^2} = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k} + \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+2}}{\rho^{2p+2}(x^2 + \rho^2)}.$$

8. Dans cette question, on admet le résultat de comparaison suivant : pour tout $\rho > 0$, tout $x \in]-\rho, \rho[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $v(x) = \frac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$, alors

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)|.$$

Soit $\rho > 0$. On pose, pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $v(x) = \frac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$.

- Vérifier que, pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, on a : $v(x) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{\rho - x} + \frac{1}{\rho + x} \right)$.
- Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\rho, \rho[$, $|v^{(n)}(x)|$ et $|v^{(n)}(-x)|$.
- Énoncer la comparaison entre $|f_\rho^{(n)}(x)|$ et $|v^{(n)}(x)|$ qui sera utilisée dans la suite.
- On suppose que $\rho > 1$. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

9. Pour $x \in [-1, 1]$ avec $x \notin \{x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}\}$, soit k l'entier de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x \in]x_{k,n}, x_{k+1,n}[$.

- Établir les inégalités :

$$|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)!(n-k)! \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!.$$

- À l'aide de la formule de Stirling, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$: $|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$.
- Déduire des questions 6.d), 8.d) et 9.b) qu'une condition suffisante pour que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = 0$$

est : $\rho > 1 + \frac{2}{e}$.

10. a) On pose, pour tout $\rho > 0$, $H(\rho) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \ln(t^2 + \rho^2) dt$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $H(\rho)$. Montrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction prolongée.
- Montrer que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.
 - Montrer qu'il existe un unique réel $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$. Montrer que $\rho_0 < 1$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,693$).
 - La démonstration initiale faisant intervenir un outil hors programme est retirée. Pour la suite, on admet le résultat obtenu dans la version initiale : pour tout $\rho > 0$, une estimation de $|w_n|$ permet d'étudier la convergence des polynômes d'interpolation hors du régime précédent.

11. On suppose qu'une fonction Python G a été définie de sorte que, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + x \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le programme suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0,001 près :

```
u, v = 0.25, 1
while v - u > 0.001:
    m = (u + v) / 2
    if G(m) > 0:
        v = m
    elif G(m) < 0:
        u = m
    else:
        u = v = m
resultat = (u + v) / 2
```

- Quelle est la méthode mise en œuvre dans ce programme ? Donner une équation vérifiée par s_0 .
 - Comparer s_0 et ρ_0 .
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(X) = 1 - (X^2 + \rho^2)P_{f_\rho, n}(X)$.
- Montrer que le polynôme w_n divise le polynôme S_n .
 - Montrer que le polynôme $P_{f_\rho, n}$ est pair.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = 1 - \frac{1}{n}$. Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n . Trouver un équivalent de $|w_n(y_n)|$ lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{\tau}{n} \times \sigma^n$, où τ et σ sont des réels strictement positifs que l'on déterminera.
 - La démonstration originale de cette question utilise un outil hors programme. On admet donc le résultat correspondant, qui permet de conclure au comportement attendu.

Dans la suite, les questions retirées sont remplacées par le résultat admis suivant : si $0 < \rho < \rho_0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = +\infty.$$

Ce résultat met en évidence le phénomène de Runge.