

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2017

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Partie I – Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

Partie I – Équivalent de I_n et formule de Stirling

$$I_n = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \text{ puis } n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Corrigé – Partie I.

1. Encadrement de I_n .

- a) La fonction $x \mapsto n(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$, avec $x = 1 - \frac{u}{n}$, $dx = -\frac{du}{n}$, et $h_n(x) = \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{n-u}$. Donc

$$I_n = \int_n^0 \frac{u^n}{n^n} e^{n-u} \left(-\frac{du}{n}\right), \quad \boxed{I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} du.}$$

- b) Soit $\phi(x) = x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2}$ sur $[0, 1[$. ϕ est dérivable et

$$\phi'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + x = \frac{(1+x)(1-x) - 1}{1-x} = \frac{-x^2}{1-x} \leq 0.$$

ϕ est décroissante et $\phi(0) = 0$, donc $\phi \leq 0$:

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \quad x + \ln(1-x) \leq -\frac{x^2}{2}.}$$

- c) Pour $x \in [0, 1[$, $h_n(x) = \exp(n(x + \ln(1-x))) \leq e^{-nx^2/2}$, et $h_n(1) = 0$. Ainsi $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2/2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2/2} dx$. La densité $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ de $\mathcal{N}(0, 1)$ est paire d'intégrale 1, donc $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. Le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ (de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $[0, +\infty[$ sur lui-même) conserve la nature et donne $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

2. La fonction H .

Pour $x \in]0, 1[$, $h_n^*(x) = \exp(n(x + \ln(1-x)))$, d'où $H(x) = -\frac{2(x + \ln(1-x))}{x^2}$.

- a) Par développement limité, $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

et $H(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$.

H se prolonge par continuité en 0 avec $H(0) = 1$.

- b)** g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1[$ avec $g'(x) = -\ln(1-x) - 1 + 1-x = -\ln(1-x) - x$ et $g''(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} > 0$ sur $]0, 1[$: g est convexe. Ainsi g' est strictement croissante sur $[0, 1[$ avec $g'(0) = 0$, donc $g' > 0$ sur $]0, 1[$, g est strictement croissante et $g(x) > g(0) = 0$.

g est convexe et strictement positive sur $]0, 1[$.

- c)** Pour $x \in]0, 1[$, en dérivant $H(x) = -2(x + \ln(1-x))x^{-2}$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= -2\left(-\frac{x}{1-x}\right)x^{-2} + 4(x + \ln(1-x))x^{-3} = \frac{2x^2 + 4(1-x)(x + \ln(1-x))}{x^3(1-x)} \\ &= \frac{4x - 2x^2 + 4(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)} = \frac{4g(x)}{x^3(1-x)} > 0. \end{aligned}$$

H est continue sur $[0, 1[$ et strictement croissante. Quand $x \rightarrow 1^-$, $x + \ln(1-x) \rightarrow -\infty$, donc $H(x) \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection :

H réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3. Minoration de I_n .

- a)**

$$u_n = \frac{1}{2n^{1/4}} : \quad 0 < u_n < 1, \quad u_n \rightarrow 0, \quad u_n\sqrt{n} = \frac{n^{1/4}}{2} \rightarrow +\infty.$$

- b)** H est continue en 0 et $u_n \rightarrow 0$, donc

$$v_n = H(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(0) = 1.$$

- c)** $h_n \geq 0$ et $u_n < 1$, donc $I_n \geq \int_0^{u_n} h_n(x) dx$. Pour $x \in]0, u_n]$, $H(x) \leq H(u_n) = v_n$ (H croissante), donc $h_n(x) \geq e^{-nv_n x^2/2}$ (aussi en $x = 0$). Avec le changement de variable affine $y = \sqrt{nv_n} x$:

$$I_n \geq \int_0^{u_n} h_n(x) dx \geq \int_0^{u_n} e^{-\frac{nv_n x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

- d)** $u_n\sqrt{nv_n} = u_n\sqrt{n}\sqrt{v_n} \rightarrow +\infty$, donc $\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} e^{-y^2/2} dy \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. Avec 1.c) et 3.c) :

$$\frac{1}{\sqrt{v_n}} \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} e^{-y^2/2} dy \leq \sqrt{n} I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Le membre de gauche tend vers $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; par le théorème d'encadrement, $\sqrt{n} I_n \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$:

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Sommes de variables exponentielles.

- a) $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$; par stabilité des lois gamma pour la somme de variables indépendantes, $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$, d'espérance et de variance n . Les T_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance et de variance 1 : par le théorème central limite, $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$, et comme Φ est continue en 0 :

$$\mathbb{P}([S_n \leq n]) = \mathbb{P}([S_n^* \leq 0]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$S_n \hookrightarrow \gamma(n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}.$$

- b) Pour $\varepsilon > 0$, $U_n \geq 0$ et $\mathbb{P}([|U_n| > \varepsilon]) = \mathbb{P}([T_{n+1} > \varepsilon\sqrt{n}]) = e^{-\varepsilon\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

- c) $T_{n+1} \geq 0$, donc $S_{n+1} \geq S_n$ et $[S_{n+1} \leq n] \subset [S_n \leq n]$, d'où $\mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) \leq \mathbb{P}([S_n \leq n])$. Si $S_n \leq n - \varepsilon\sqrt{n}$ et $U_n \leq \varepsilon$, alors $S_{n+1} = S_n + \sqrt{n}U_n \leq n$: d'où l'inclusion, et

$$\mathbb{P}([S_n^* \leq -\varepsilon]) \leq \mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) + \mathbb{P}([U_n > \varepsilon]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) \leq \mathbb{P}([S_n \leq n]).$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de Φ en 0, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(-\varepsilon) \geq \frac{1}{2} - \eta$. Par le TCL, $\mathbb{P}([S_n^* \leq -\varepsilon]) \rightarrow \Phi(-\varepsilon)$; avec a) et b), il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$: $\mathbb{P}([S_n^* \leq -\varepsilon]) \geq \frac{1}{2} - 2\eta$, $\mathbb{P}([U_n > \varepsilon]) \leq \eta$ et $\mathbb{P}([S_n \leq n]) \leq \frac{1}{2} + \eta$. Alors $\frac{1}{2} - 3\eta \leq \mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) \leq \frac{1}{2} + \eta$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) = \frac{1}{2}.$$

5. Formule de Stirling.

$S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$ a pour densité $t \mapsto \frac{t^n e^{-t}}{n!}$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après 1.a),

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leq n]) = \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt = \frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!} I_n.$$

D'après 4.c), cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$, et d'après 3.d), $n^{n+1} e^{-n} I_n \sim n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Donc $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{2n!} \rightarrow \frac{1}{2}$:

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II – Quelques propriétés de la loi de Cauchy

Partie II – La fonction Arctan et la loi $\mathcal{C}_\theta$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x - \theta).$$

Corrigé – Partie II.

6. La fonction Arctan.

- a) $k : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$, donc constante égale à $k(0) = 0$.

Arctan est impaire.

- b) Arctan est de classe $\mathcal{C}^3$: la formule de Taylor–Young justifie l'existence du développement limité à l'ordre 3. On a $\operatorname{Arctan}(0) = 0$, $\operatorname{Arctan}'(x) = (1+x^2)^{-1}$, $\operatorname{Arctan}''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$, $\operatorname{Arctan}'''(x) = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3}$, donc les dérivées en 0 valent 1, 0, -2.

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

- c) Arctan est croissante et $\operatorname{Arctan}(0) = 0$, donc $\operatorname{Arctan}(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction $\ell : x \mapsto x - \operatorname{Arctan}(x)$ a pour dérivée $1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ et $\ell(0) = 0$, donc $\ell \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x.$$

- d) $m : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $m'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+1/x^2} = 0$: m est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, égale à $m(1) = 2 \operatorname{Arctan}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$ (car $\tan \frac{\pi}{4} = 1$).

$$\forall x > 0, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

7. La loi de Cauchy.

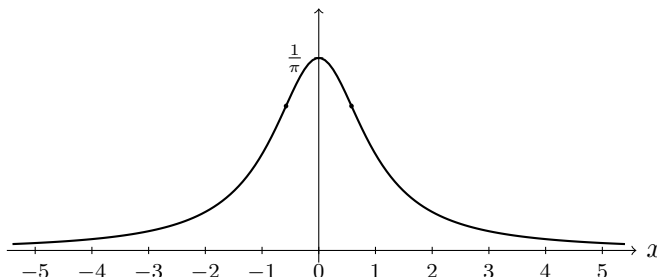
- a) $f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\theta)^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A, B > 0$, $\int_{-A}^B f = \frac{1}{\pi} (\operatorname{Arctan}(B-\theta) - \operatorname{Arctan}(-A-\theta)) \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

- b) $xf_X(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge : $\int_0^{+\infty} xf_X(x) dx$ diverge (comparaison de fonctions positives), donc l'intégrale ne converge pas absolument.

X n'admet pas d'espérance.

- c) Pour $\theta = 0$, f_X est paire, croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de maximum $\frac{1}{\pi} \simeq 0,32$ en 0, de limite 0 en $\pm\infty$; $f_X''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{\pi(1+x^2)^3}$ s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (points d'inflexion).



8. Fonction de répartition et médiane.

a) $F_X(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(t - \theta)]_{-A}^x :$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x - \theta).$$

b) $F_X(x) = \frac{1}{2} \iff \text{Arctan}(x - \theta) = 0 \iff x = \theta$ (Arctan est bijective et $\text{Arctan}(0) = 0$).

La médiane théorique de X est θ .

Partie III – La loi de la moyenne empirique

Partie III – Calcul d'intégrale, loi de $\bar{Y}_n$ et simulation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x} = \frac{(n+1)\pi}{x^2 + (n+1)^2} ; \bar{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_0.$$

Corrigé – Partie III.

9. Une intégrale.

- a) $\varphi_{n,x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \leq \varphi_{n,x}(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge (et vaut π , cf. 7.a avec $\theta = 0$). Par comparaison de fonctions positives :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt \text{ converge.}$$

- b) Soit $\Psi(t) = \ln(1+t^2) - \ln(1+(x-nt)^2)$. Alors $\Psi'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{-2n(x-nt)}{1+(x-nt)^2} = \psi_{n,x}(t)$.
Quand $t \rightarrow \pm\infty$, $\Psi(t) = \ln \frac{1+t^2}{1+(x-nt)^2} \rightarrow \ln \frac{1}{n^2}$. Pour $A, B > 0$, $\int_{-A}^B \psi_{n,x} = \Psi(B) - \Psi(-A) \rightarrow \ln \frac{1}{n^2} - \ln \frac{1}{n^2} :$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t) dt \text{ converge et vaut } 0.$$

- c) Soit $(n, x) \neq (1, 0)$. Comme $\gamma = -n^2\alpha$, on a $\gamma t = -\alpha n(nt - x) - \alpha nx$, d'où

$$\varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha}{2} \psi_{n,x}(t) + \frac{\beta}{1+t^2} + \frac{\delta - \alpha nx}{1+(x-nt)^2}.$$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ et, par le changement de variable affine $s = nt - x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(x-nt)^2} = \frac{\pi}{n}$. Toutes ces intégrales convergent ; par linéarité et b) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x} = \pi \left(\beta + \frac{\delta - \alpha nx}{n} \right) = \frac{\pi}{\sigma_{n,x}} (1 + x^2 - n^2 + n(x^2 + n^2 - 1)),$$

car $\delta - \alpha nx = \frac{n^2(x^2 + n^2 - 1)}{\sigma_{n,x}}$. Or $1 + x^2 - n^2 + nx^2 + n^3 - n = (n+1)x^2 + (n-1)(n^2 - 1) = (n+1)(x^2 + (n-1)^2)$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt = \frac{(n+1)\pi}{x^2 + (n+1)^2}.$$

10. Loi de la moyenne empirique.

- a) $F_Y(y) = \mathbb{P}([X \leq y + \theta]) = F_X(y + \theta) :$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(y), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{C}_0.$$

- b) Y_1 et Y_2 sont indépendantes, de densité bornée $f_Y : y \mapsto \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Par le théorème de convolution, S_2 admet pour densité $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)f_Y(x-t) dt =$

$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,x}(t) dt$. Pour $x \neq 0$, d'après 9.c), $h(x) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi}{x^2+4}$. Une densité pouvant être modifiée en un point :

$$x \mapsto \frac{2}{\pi(x^2+4)} \text{ est une densité de } S_2.$$

$\bar{Y}_2 = \frac{1}{2}S_2$ a pour densité $y \mapsto 2 \cdot \frac{2}{\pi(4y^2+4)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$:

$$\bar{Y}_2 \hookrightarrow \mathcal{C}_0.$$

- c) Montrons par récurrence que $s_n : x \mapsto \frac{n}{\pi(x^2+n^2)}$ est une densité de S_n . C'est vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang n , S_n et Y_{n+1} sont indépendantes (lemme des coalitions), et S_{n+1} a pour densité $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t) f_Y(x-t) dt$. Le changement de variable $t = ns$ (affine) donne, puisque $n s_n(ns) = \frac{1}{\pi(1+s^2)}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t) f_Y(x-t) dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(s) ds = \frac{n+1}{\pi(x^2+(n+1)^2)}$$

(pour tout x si $n \geq 2$, pour $x \neq 0$ si $n = 1$, cf. b)). Enfin $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}S_n$ a pour densité $y \mapsto n s_n(ny) = \frac{n^2}{\pi(n^2y^2+n^2)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \bar{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_0.$$

- d) La loi faible des grands nombres suppose que les Y_i admettent une variance ; ici Y n'admet même pas d'espérance (7.b). D'ailleurs $\bar{Y}_n$ suit la loi $\mathcal{C}_0$ pour tout n : $\mathbb{P}(|\bar{Y}_n| \geq 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0, donc $(\bar{Y}_n)$ ne converge pas en probabilité vers 0.

Non : Y n'admet ni espérance ni variance.

11. Simulation.

- a) Chaque ligne de **A** contient n réalisations indépendantes de loi $\mathcal{C}_0$; la moyenne de chaque ligne est une réalisation de $\bar{Y}_n$:
- ```
MoyEmp = np.sum(A, axis=1) / n
```
- b) L'histogramme 1 représente 12 000 réalisations de  $\bar{Y}_{200}$ , l'histogramme 2 représente 12 000 réalisations de  $Y_{1,1}$ , de loi  $\mathcal{C}_0$ . Ils sont pratiquement identiques et proches de la courbe de 7.c) (maximum voisin de  $\frac{1}{\pi}$ ) :

$\bar{Y}_{200}$  a la même loi  $\mathcal{C}_0$  que chaque  $Y_i$  :  
la moyenne empirique ne se concentre pas autour de 0.

## Partie IV – La loi de la médiane empirique

### Partie IV – Densité de la médiane empirique

$$f_{\hat{X}_{n+1}} = (n+1) \binom{2n+1}{n} F_X^n (1 - F_X)^n f_X.$$

#### Corrigé – Partie IV.

Notons  $C_n = (n+1) \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$  et, pour  $h > 0$ ,  $p_h = F_X(x+h) - F_X(x)$ . Les  $X_i$  étant à densité et indépendantes, les événements  $[X_i = X_j]$  ( $i \neq j$ ),  $[X_i = x]$  et  $[X_i = x+h]$  sont de probabilité nulle : on raisonne à un événement négligeable près.

#### 12. Densité de $\hat{X}_{n+1}$ .

- a) Sur  $B$ , un seul  $X_i$  appartient à  $]x, x+h[$  ; comme  $\hat{X}_{n+1}$  est l'un des  $X_i$  et appartient (presque sûrement) à  $]x, x+h[$ , c'est  $X_{i_0}$ , et exactement  $n$  des autres sont  $\leq x$ , les  $n$  derniers  $\geq x+h$ . Réciproquement, une telle configuration réalise  $B$ . Ainsi  $B$  est (à un négligeable près) la réunion disjointe, sur les choix de  $i_0$  ( $2n+1$  choix) et de l'ensemble  $J$  des  $n$  indices  $j \neq i_0$  tels que  $X_j \leq x$  ( $\binom{2n}{n}$  choix), des événements

$$[x < X_{i_0} < x+h] \cap \bigcap_{j \in J} [X_j \leq x] \cap \bigcap_{j \notin J \cup \{i_0\}} [X_j \geq x+h],$$

chacun de probabilité  $p_h F_X(x)^n (1 - F_X(x+h))^n$  par indépendance. Comme  $(2n+1) \binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = C_n$  :

$$\mathbb{P}(B) = (n+1) \binom{2n+1}{n} (F_X(x))^n (F_X(x+h) - F_X(x)) (1 - F_X(x+h))^n.$$

- b)  $B \subset A$ , donc  $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap [Z \neq 1]) \geq 0$ . Sur  $A$ ,  $Z \geq 1$  presque sûrement, donc  $A \cap [Z \neq 1] \subset [Z \geq 2] \subset \bigcup_{i < j} ([x < X_i < x+h] \cap [x < X_j < x+h])$ , d'où par indépendance  $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq \binom{2n+1}{2} p_h^2$ .

$$0 \leq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq K (F_X(x+h) - F_X(x))^2, \quad K = n(2n+1).$$

- c) Notons  $F = F_{\hat{X}_{n+1}}$  et  $\rho(x) = C_n F_X(x)^n (1 - F_X(x))^n f_X(x)$ , continue.  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , de dérivée  $f_X$ . Pour  $h > 0$ ,  $F(x+h) - F(x) = \mathbb{P}(A)$  et, avec a) et b),

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = C_n F_X(x)^n \frac{p_h}{h} (1 - F_X(x+h))^n + \varepsilon_h, \quad 0 \leq \varepsilon_h \leq K h \left( \frac{p_h}{h} \right)^2.$$

Comme  $\frac{p_h}{h} \rightarrow f_X(x)$ , on obtient  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow \rho(x)$  quand  $h \rightarrow 0^+$ . En appliquant ce qui précède au point  $x-h$  (la constante  $K$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $h$ ) :

$$\frac{F(x) - F(x-h)}{h} = C_n F_X(x-h)^n \frac{F_X(x) - F_X(x-h)}{h} (1 - F_X(x))^n + \varepsilon'_h,$$

qui tend vers  $\rho(x)$  quand  $h \rightarrow 0^+$  (avec  $0 \leq \varepsilon'_h \leq K h \left( \frac{F_X(x) - F_X(x-h)}{h} \right)^2$ ).  $F$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $\rho$  continue :  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\hat{X}_{n+1}$  admet  $\rho$  pour densité.

$$f_{\hat{X}_{n+1}}(x) = (n+1) \binom{2n+1}{n} (F_X(x))^n (1 - F_X(x))^n f_X(x).$$

**Partie IV – Propriétés de l'estimateur  $\hat{X}_{n+1}$  et intervalle de confiance**

Moments, convergence, loi limite de  $W_{n+1} = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}(\hat{X}_{n+1} - \theta)$ , Python.

**Corrigé – Partie IV.**

Notons  $f = f_{\hat{X}_{n+1}}$  et  $F = F_{\hat{X}_{n+1}}$ . D'après 8.a) et l'impairité d'Arctan, pour tout  $t$  :  $F_X(2\theta - t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(t - \theta) = 1 - F_X(t)$  et  $f_X(2\theta - t) = f_X(t)$  ; donc

$$f(2\theta - t) = C_n(1 - F_X(t))^n F_X(t)^n f_X(t) = f(t). \quad (\star)$$

**13. Espérance et variance.**

- a) Quand  $x \rightarrow +\infty$  :  $F_X(x) \rightarrow 1$  ; pour  $x > \theta$ , d'après 6.d),  $1 - F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x - \theta) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x - \theta}\right) \sim \frac{1}{\pi(x - \theta)} \sim \frac{1}{\pi x}$  (car  $\text{Arctan } u \sim u$  en 0, 6.b) ; et  $f_X(x) \sim \frac{1}{\pi x^2}$ . Donc

$$x f_{\hat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{\pi^{n+1}} \times \frac{1}{x^{n+1}}.$$

- b)  $n+1 \geq 2$  : par comparaison à une intégrale de Riemann convergente (fonctions positives),  $\int_1^{+\infty} x f(x) dx$  converge. Par  $(\star)$  et le changement de variable affine  $x = 2\theta - u$ ,  $\int_{-\infty}^{-1} |x| f(x) dx = \int_{2\theta+1}^{+\infty} |2\theta - u| f(u) du$ , qui converge car  $|2\theta - u| f(u) \leq |u| f(u) + 2|\theta| f(u)$ .

$$\boxed{\hat{X}_{n+1} \text{ admet une espérance.}}$$

- c)  $\hat{X}_{n+1} = g_{n+1}(X_1, \dots, X_{2n+1})$  où  $g_{n+1}$  ne dépend pas de  $\theta$  : c'est un estimateur de  $\theta$ . Par  $(\star)$  et le changement de variable  $t = 2\theta - u$ ,

$$\mathbb{E}(\hat{X}_{n+1} - \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \theta) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta - u) f(u) du = -\mathbb{E}(\hat{X}_{n+1} - \theta).$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\hat{X}_{n+1} - \theta) = 0 : \hat{X}_{n+1} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

- d) D'après a),  $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C_n}{\pi^{n+1} x^n}$ , positive :  $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$  converge si et seulement si  $n > 1$  (Riemann) ; par  $(\star)$ , il en est de même en  $-\infty$ .

$$\boxed{\hat{X}_{n+1} \text{ admet une variance si et seulement si } n \geq 2.}$$

**14. Convergence.**

- a) La relation  $(\star)$  est établie ci-dessus. Par le changement de variable affine  $t = 2\theta - u$  :

$$\mathbb{P}([\hat{X}_{n+1} \geq \theta + \varepsilon]) = \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f(2\theta - u) du = F(\theta - \varepsilon).$$

Comme  $\mathbb{P}(|\hat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) = F(\theta - \varepsilon) + \mathbb{P}([\hat{X}_{n+1} \geq \theta + \varepsilon])$  :

$$\boxed{f(2\theta - t) = f(t) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|\hat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) = 2F(\theta - \varepsilon).}$$

- b)  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante : le changement de variable  $u = F_X(x)$  est  $\mathcal{C}^1$  bijectif de  $]-\infty, \theta - \varepsilon]$  sur  $]0, p]$ , avec  $p = F_X(\theta - \varepsilon) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(\varepsilon) \in ]0, \frac{1}{2}]$ , et conserve la nature :

$$F(\theta - \varepsilon) = C_n \int_0^p u^n (1 - u)^n du.$$

$u \mapsto u(1 - u)$  est croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , donc  $u(1 - u) \leq q = p(1 - p) < \frac{1}{4}$  sur  $]0, p]$ . Avec  $\binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n+1}$  :

$$0 \leq \mathbb{P}(|\hat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) \leq 2C_n p q^n \leq 4p(n+1)(4q)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées ( $0 < 4q < 1$ ).

$$\boxed{\hat{X}_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \theta.}$$

- c) La fonction de répartition de la variable certaine  $\theta$  vaut 0 sur  $]-\infty, \theta[$  et 1 sur  $[\theta, +\infty[$ , continue sauf en  $\theta$ . Pour  $x < \theta$ , avec  $\varepsilon = \theta - x$ , b) donne  $F(x) = F(\theta - \varepsilon) \rightarrow 0$ . Pour  $x > \theta$ , avec  $\varepsilon = x - \theta$ ,  $F(x) = 1 - \mathbb{P}([\hat{X}_{n+1} > x]) = 1 - F(\theta - \varepsilon) \rightarrow 1$  (cf. a). Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{\text{Oui : } (\hat{X}_{n+1}) \text{ converge en loi vers la variable certaine } \theta.}$$

## 15. Loi limite et intervalle de confiance.

- a) Posons  $c = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi} > 0$ .  $W_{n+1} = c(\hat{X}_{n+1} - \theta)$  a pour densité  $x \mapsto \frac{1}{c} f(\theta + \frac{x}{c})$ . Avec  $y = \frac{x}{c} = \frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}$  et  $a = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(y) : F_X(\theta + y) = \frac{1}{2} + a$ ,  $1 - F_X(\theta + y) = \frac{1}{2} - a$ ,  $f_X(\theta + y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ . Donc

$$f_{W_{n+1}}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}} C_n \left(\frac{1}{4} - a^2\right)^n \frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

$$\boxed{f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \left( \text{Arctan}\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}\right) \right)^2 \right]^n \times \left( 1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)} \right)^{-1} .}$$

- b) On a  $C_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = (2n+1) \binom{2n}{n}$  et, par la formule de Stirling (question 5),  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ . Écrivons

$$f_{W_{n+1}}(x) = \underbrace{\frac{C_n}{2\sqrt{2n+1} 4^n}}_{a_n} (1 - b_n)^n (1 + y_n^2)^{-1},$$

$$y_n = \frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}, \quad b_n = \frac{4}{\pi^2} \text{Arctan}(y_n)^2 \in [0, 1[.$$

$a_n \sim \frac{(2n+1)}{2\sqrt{2n+1}\sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{\pi n}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ;  $y_n \rightarrow 0$  donc  $(1 + y_n^2)^{-1} \rightarrow 1$ . Si  $x = 0$ ,  $b_n = 0$ . Si  $x \neq 0$ ,  $\text{Arctan}(y_n) \sim y_n$  donc  $b_n \sim \frac{4}{\pi^2} y_n^2 = \frac{x^2}{2n+1} \rightarrow 0$ , puis  $n \ln(1 - b_n) \sim -nb_n \rightarrow -\frac{x^2}{2}$ , et par continuité de l'exponentielle  $(1 - b_n)^n \rightarrow e^{-x^2/2}$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{W_{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$$

c)  $\Phi$  est continue, donc  $\mathbb{P}([-t_\alpha \leq W_{n+1} \leq t_\alpha]) = F_{W_{n+1}}(t_\alpha) - F_{W_{n+1}}(-t_\alpha) \rightarrow \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$ . Or

$$-t_\alpha \leq W_{n+1} \leq t_\alpha \iff \hat{X}_{n+1} - \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} \leq \theta \leq \hat{X}_{n+1} + \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}}.$$

Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donc :

$$\left[ \hat{X}_{n+1} - \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} ; \hat{X}_{n+1} + \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} \right].$$

## 16. Simulation de la médiane empirique.

Chaque ligne de **A** est une réalisation de l'échantillon ; on trie chaque ligne (par ordre décroissant). La ligne triée contient  $2n+1$  valeurs : la médiane est la  $(n+1)$ -ième, d'indice  $n$  en Python, quel que soit le sens du tri. Enfin,  $\theta = 0$  donne  $W_{n+1} = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi} \hat{X}_{n+1}$ .

```
A = cauchy(p, 2*n+1)
S = triLignes(A)
MedianeEmp = S[:, n]
W = 2 * np.sqrt(2*n+1) / np.pi * MedianeEmp
```