

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Composée de deux projecteurs

A, B matrices de projecteurs (symétriques dans la partie 2) : le spectre de AB est inclus dans $[0, 1]$.

Corrigé – Exercice 1.

Partie 1. Posons $w = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que ${}^tww = 1+a^2$, ${}^tee = 2$, ${}^tew = {}^twe = 1+a$ et

$$A = \frac{w {}^t w}{1+a^2}, \quad B = \frac{e {}^t e}{2}.$$

1. Projecteurs.

$$A^2 = \frac{w({}^tww){}^tw}{(1+a^2)^2} = \frac{w {}^t w}{1+a^2} = A \text{ et de même } B^2 = \frac{e({}^tee){}^te}{4} = B.$$

$$u \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ v = v.$$

2. Rang et spectre de $u \circ v$.

a) Les colonnes de A sont proportionnelles à $w \neq 0$, et $A \neq 0$: $\text{rg}(A) = 1$; de même $\text{rg}(B) = 1$. Ensuite

$$AB = \frac{w({}^twe){}^te}{2(1+a^2)} = \frac{1+a}{2(1+a^2)} w {}^t e = \frac{1+a}{2(1+a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(v) = 1 ; \text{rg}(u \circ v) = 1 \text{ si } a \neq -1, \quad u \circ v = 0 \text{ si } a = -1.$$

b) x_0 a pour matrice $w \neq 0$ et $ABw = \frac{1+a}{2(1+a^2)} w({}^tew) = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} w$.

$$x_0 \text{ est vecteur propre de } u \circ v \text{ associé à } \mu_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.$$

c) Si $a \neq -1$: $u \circ v$ est de rang 1, donc (théorème du rang) son noyau est de dimension 1 et 0 est valeur propre ; avec b), $\mu_a \neq 0$ est valeur propre, et en dimension 2 il n'y en a pas d'autre (deux sous-espaces propres de dimension au moins 1). Si $a = -1$, $u \circ v = 0$ et $\mu_{-1} = 0$.

$$\text{Sp}(u \circ v) = \left\{ 0, \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \right\}.$$

3. Valeurs propres et projecteurs.

a) $\mu_a \geq 0$ et $2(1+a^2) - (1+a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$, donc $\mu_a \leq 1$.

$$\boxed{\text{Sp}(u \circ v) \subset [0; 1].}$$

b) Avec $c = \frac{1+a}{2(1+a^2)}$, $AB = cw^te$ et $(AB)^2 = c^2w(tew)^te = c(1+a)AB = \mu_a AB$.
Donc AB est un projecteur si et seulement si $AB = 0$ ou $\mu_a = 1$, c'est-à-dire $a = -1$ ou $(1-a)^2 = 0$.

$$\boxed{u \circ v \text{ est un projecteur si et seulement si } a \in \{-1, 1\}.$$

Partie 2. Ici ${}^tA = A = A^2$ et ${}^tB = B = B^2$.

4. Contraction.

$\|BX\|^2 = {}^tX {}^tB BX = {}^tX B^2 X = {}^tX BX = {}^t(BX)X = \langle BX, X \rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|BX\|^2 \leq \|BX\| \|X\|$; si $BX \neq 0$ on divise par $\|BX\|$, et sinon l'inégalité est évidente.

$$\boxed{\|BX\|^2 = \langle BX, X \rangle \quad \text{et} \quad \|BX\| \leq \|X\|.$$

5. Diagonalisabilité de C .

${}^tC = {}^tB {}^tA {}^tB = BAB = C$: C est symétrique réelle. D'après le théorème spectral,

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

6. Valeurs propres de C .

a) $\|ABX\|^2 = {}^tX B {}^tA ABX = {}^tX BA^2 BX = {}^tX BABX = {}^tX CX = \lambda {}^tXX :$

$$\boxed{\|ABX\|^2 = \lambda \|X\|^2.}$$

b) Comme $X \neq 0$, $\lambda = \frac{\|ABX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } C \text{ sont des réels positifs.}}$$

7. Valeurs propres non nulles de AB .

Ici $ABX = \mu X$ avec $\mu \neq 0$ et $X \neq 0$.

a) $C(BX) = BAB^2X = BABX = \mu BX$. De plus $BX \neq 0$, sinon $\mu X = ABX = 0$.

$$\boxed{BX \text{ est un vecteur propre de } C \text{ (associé à } \mu \text{).}}$$

b) D'une part $A(ABX) = A(\mu X) = \mu AX$; d'autre part $A(ABX) = A^2BX = ABX$.
Donc $ABX = \mu AX$, puis $\mu X = \mu AX$ et, comme $\mu \neq 0$:

$$\boxed{ABX = \mu AX \quad \text{et} \quad AX = X.}$$

c) Comme A est symétrique et $AX = X$: $\langle X, BX \rangle = {}^t(AX)BX = {}^tX ABX = \mu {}^tXX$.

$$\boxed{\langle X, BX \rangle = \mu \|X\|^2.}$$

8. Conclusion.

Soit $\mu \in \text{Sp}(AB)$. Si $\mu = 0$, $\mu \in [0, 1]$. Sinon, avec 7.c) et la question 4,

$$\mu \|X\|^2 = \langle X, BX \rangle = \|BX\|^2 \in [0, \|X\|^2],$$

donc $0 \leq \mu \leq 1$ (car $\|X\| > 0$).

$$\boxed{\text{Sp}(AB) \subset [0; 1].}$$

Exercice 2

Exercice 2 – Suite de Fibonacci et nombre d'or

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \text{ extrema de } f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y; \varphi = 1 - \sum \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

Corrigé – Exercice 2.

1. Le nombre d'or.

$\sqrt{5} > 1$ donc $\varphi > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$. Les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (discriminant 5), et $\varphi \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$, donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$.

$$\varphi > 1 \text{ et les solutions de } x^2 - x - 1 = 0 \text{ sont } \varphi \text{ et } -\frac{1}{\varphi}.$$

En particulier $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2. Extrema de f .

a) f est polynomiale :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

b) $\partial_1 f(x, y) = 6x^2 - 6y$ et $\partial_2 f(x, y) = -6x + 6y - 6$. Un point critique vérifie $y = x^2$ et $y = x + 1$, donc $x^2 - x - 1 = 0 : x = \varphi$ et $y = \varphi^2 = \varphi + 1$, ou $x = -\frac{1}{\varphi}$ et $y = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi-1}{\varphi}$. Or $(\varphi-1)(\varphi+1) = \varphi^2 - 1 = \varphi$, donc $\frac{\varphi-1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi+1}$.

$$\text{Les points critiques sont } (\varphi, \varphi+1) \text{ et } \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right).$$

c) $\partial_{1,1}^2 f = 12x$, $\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f = -6$, $\partial_{2,2}^2 f = 6$. La forme quadratique associée à la hessienne en un point d'abscisse x est

$$q(h, k) = 12xh^2 - 12hk + 6k^2 = 6(k-h)^2 + (12x-6)h^2.$$

Si Y est un vecteur propre de la hessienne pour la valeur propre λ , $q(Y) = \lambda \|Y\|^2$.

- En $(\varphi, \varphi+1) : 12\varphi - 6 = 6\sqrt{5} > 0$, donc $q(h, k) > 0$ pour $(h, k) \neq (0, 0)$ (si $h \neq 0$ le second terme est > 0 , sinon $k \neq 0$ et le premier l'est). Les valeurs propres sont strictement positives : minimum local, de valeur $f(\varphi, \varphi+1) = -5\varphi - 4$ (à l'aide de $\varphi^2 = \varphi + 1$).
- En $(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}) : 12x - 6 < 0 ; q(1, 1) = 12x - 6 < 0$ et $q(0, 1) = 6 > 0$. La hessienne a donc une valeur propre strictement négative et une strictement positive (sinon q serait de signe constant) : point selle.

$$(\varphi, \varphi+1) : \text{minimum local} ; \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right) : \text{point selle (pas d'extremum)}.$$

3. Identité de Cassini.

Pour $n = 0 : u_0 u_2 - u_1^2 = -1 = (-1)^1$. Si la formule est vraie au rang n :

$$u_{n+1} u_{n+3} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+2}(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = -(-1)^{n+1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

4. Expression de u_n .

a) On maintient $v = u_{k-1}$ et $w = u_k$:

```
def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2, n + 1):
        z = v + w      # z = u_k
        v = w          # v = u_{k-1}
        w = z          # w = u_k
    u = w
    return u
```

b) (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$, de racines distinctes φ et $-\frac{1}{\varphi}$: il existe λ, μ réels tels que $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(-\frac{1}{\varphi})^n$. Avec $u_0 = 0$: $\mu = -\lambda$; avec $u_1 = 1$: $\lambda(\varphi + \frac{1}{\varphi}) = 1$, et $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

c) Comme $|\frac{1}{\varphi}| < 1$, $(-\frac{1}{\varphi})^n \rightarrow 0$ tandis que $\varphi^n \rightarrow +\infty$: $u_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \varphi$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi.$$

5. Une série alternée.

a) Pour $n \geq 1$, $u_n \geq 1 > 0$ (réurrence immédiate) et $\frac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{5}{\varphi^{2n+1}} = \frac{5}{\varphi} \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente ($0 < \frac{1}{\varphi^2} < 1$). Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n u_{n+1}} \text{ converge.}$$

b) $\left| \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} \right| = \frac{1}{u_k u_{k+1}}$: la série $\sum \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ converge absolument, donc converge.

$$(S_n)_{n \geq 1} \text{ converge.}$$

c) D'après la question 3 :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

d) Par télescopage, pour $n \geq 2$, $S_n = S_1 + \sum_{m=1}^{n-1} (S_{m+1} - S_m) = S_1 + \frac{u_1}{u_2} - \frac{u_n}{u_{n+1}}$. Or $S_1 = -\frac{1}{u_1 u_2} = -1$ et $\frac{u_1}{u_2} = 1$: $S_n = -\frac{u_n}{u_{n+1}} \rightarrow -\frac{1}{\varphi}$ (question 4.c). Comme $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ (car $\varphi^2 = \varphi + 1$) :

$$\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

Problème

Problème – Partie 1 – Relation de Panjer

$\mathbb{P}(N = k) = (a + \frac{b}{k})\mathbb{P}(N = k - 1)$: exemples, espérance et variance.

Corrigé – Problème.

1. Cas $a = 0, b > 0$.

- a) Par récurrence : vrai pour $k = 0$; si $\mathbb{P}(N = k - 1) = \frac{b^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{P}(N = 0)$, alors
 $\mathbb{P}(N = k) = \frac{b}{k}\mathbb{P}(N = k - 1) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0).$$

- b) Les événements $[N = k], k \in \mathbb{N}$, forment un système complet, donc $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N = 0)e^b$. Ainsi $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-b}$ et $\mathbb{P}(N = k) = e^{-b}\frac{b^k}{k!}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N = 0)e^b = 1, \quad N \hookrightarrow \mathcal{P}(b), \quad \mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = b.$$

2. Cas $a < 0, b = -2a$.

- a) $\mathbb{P}(N = 2) = (a + \frac{b}{2})\mathbb{P}(N = 1) = 0$, puis par récurrence $\mathbb{P}(N = k) = (a + \frac{b}{k})\mathbb{P}(N = k - 1) = 0$ pour $k \geq 3$.

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(N = k) = 0.$$

- b) $\mathbb{P}(N = 1) = (a + b)\mathbb{P}(N = 0) = -a\mathbb{P}(N = 0)$ et $\mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) = 1$, d'où
 $\mathbb{P}(N = 0) = \frac{1}{1-a}$ et $\mathbb{P}(N = 1) = \frac{-a}{1-a} \in]0, 1[$.

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{-a}{1-a}\right).$$

3. Loi binomiale.

- a) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} \binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1},$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1).$$

- b) $\frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k} = -\frac{p}{1-p} + \frac{(n+1)p}{(1-p)k}$. Posons $a = -\frac{p}{1-p} < 1$ et $b = \frac{(n+1)p}{1-p}$. La relation est vraie pour $k \leq n$; pour $k = n+1$, $a + \frac{b}{n+1} = 0$ et $\mathbb{P}(Z = n+1) = 0$; pour $k \geq n+2$, les deux membres sont nuls. Enfin $\mathbb{P}(Z = 0) = (1-p)^n \neq 1$.

$$Z \text{ vérifie une relation de Panjer avec } a = -\frac{p}{1-p}, \quad b = \frac{(n+1)p}{1-p}.$$

4. Cas général.

Notons $P_k = \mathbb{P}(N = k)$, $M_m = \sum_{k=1}^m kP_k$ et $Q_m = \sum_{k=1}^m k^2P_k$.

- a) $P_1 = (a + b)P_0$. Si l'on avait $P_0 = 0$, par récurrence tous les P_k seraient nuls, ce qui contredit $\sum P_k = 1$. Donc $P_0 > 0$, et $P_1 \geq 0$ impose :

$$\mathbb{P}(N = 1) = (a + b)\mathbb{P}(N = 0) \quad \text{et} \quad a + b \geq 0.$$

- b) Pour $k \geq 1$, $kP_k = (ak + b)P_{k-1}$. En sommant pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et en posant $j = k - 1$:

$$\sum_{k=1}^m kP_k = a \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)P_j + b \sum_{j=0}^{m-1} P_j.$$

- c) Comme $\sum_{j=0}^{m-1} (j+1)P_j = M_{m-1} + \sum_{j < m} P_j$ (avec $M_0 = 0$), b) s'écrit $M_m = aM_{m-1} + (a + b)\sum_{j < m} P_j$, d'où

$$(1 - a)M_m = (a + b) \sum_{j=0}^{m-1} P_j - a m P_m.$$

- Si $0 \leq a < 1$: $(1 - a)M_m \leq a + b$.
- Si $a < 0$: pour $k > \frac{b}{-a}$, $a + \frac{b}{k} < 0$ et $P_k \geq 0$, $P_{k-1} \geq 0$ imposent $P_k = 0$. Les P_m sont nuls à partir d'un certain rang, (M_m) est stationnaire.

Dans tous les cas $((1 - a)M_m)$ est majorée, donc (M_m) aussi ($1 - a > 0$). La série $\sum kP_k$ est à termes positifs, de sommes partielles majorées : elle converge, N admet une espérance, et $mP_m \rightarrow 0$. En passant à la limite :

$$N \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(N) = \frac{a + b}{1 - a}.$$

- d) Pour $k \geq 1$, $k^2P_k = (ak^2 + bk)P_{k-1}$; en sommant et en posant $j = k - 1$:

$$Q_m = \sum_{j=0}^{m-1} (a(j+1)^2 + b(j+1))P_j = aQ_{m-1} + (2a + b)M_{m-1} + (a + b) \sum_{j < m} P_j,$$

donc $(1 - a)Q_m = (2a + b)M_{m-1} + (a + b)\sum_{j < m} P_j - a m^2 P_m$. Si $0 \leq a < 1$, $(1 - a)Q_m \leq |2a + b|\mathbb{E}(N) + a + b$; si $a < 0$, (Q_m) est stationnaire. Comme en c), N^2 admet une espérance (transfert), $m^2P_m \rightarrow 0$, et

$$(1 - a)\mathbb{E}(N^2) = (2a + b)\frac{a + b}{1 - a} + (a + b) = \frac{(a + b)(a + b + 1)}{1 - a}.$$

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}.$$

- e) Par la formule de König–Huygens :

$$\mathbb{V}(N) = \frac{(a + b)(a + b + 1) - (a + b)^2}{(1 - a)^2}, \quad \mathbb{V}(N) = \frac{a + b}{(1 - a)^2}.$$

- f) $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \iff (a + b)((1 - a) - 1) = 0 \iff a(a + b) = 0$. Si $a + b = 0$, $P_1 = 0$ puis tous les P_k ($k \geq 1$) sont nuls et $P_0 = 1$: exclu. Donc $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \iff a = 0$. Si $a = 0$, alors $b = a + b \geq 0$, et $b \neq 0$ (sinon $P_0 = 1$) : $b > 0$ et $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ d'après 1. Réciproquement, si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = \lambda$.

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \iff N \text{ suit une loi de Poisson.}$$

Problème – Partie 2 – Fonction génératrice

$$G(x) = \sum p_k x^k = p_0(1 - ax)^\alpha \text{ pour } 0 < a < 1.$$

Corrigé – Problème.

Dans cette partie, $0 < a < 1$ et $\frac{b}{a} > 0$, donc $b > 0$ et $\alpha = -\frac{a+b}{a} < 0$; pour $x \in [0, 1]$, $1 - ax \geq 1 - a > 0$.

5. Convergence.

Pour $x \in [0, 1]$, $0 \leq p_k x^k \leq p_k$ et $\sum p_k = 1$ converge.

$$\sum_{k \geq 0} p_k x^k \text{ converge pour tout } x \in [0; 1].$$

6. Dérivées de f .

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et, par récurrence, $f^{(k)}(x) = p_0 \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) (-a)^k (1 - ax)^{\alpha - k}$.
Or $-a(\alpha - j) = a + b + aj$, donc

$$f^{(k)}(x) = p_0 \prod_{j=1}^k (aj + b) (1 - ax)^{\alpha - k}.$$

D'autre part, la relation de Panjer donne $p_k = p_0 \prod_{j=1}^k (a + \frac{b}{j})$, soit $k! p_k = p_0 \prod_{j=1}^k (aj + b)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \quad f^{(k)}(x) = k! p_k (1 - ax)^{\alpha - k}.$$

7. Expression de G .

a) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x , avec $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = p_k$ et $f^{(n+1)}(t) = (n+1)! p_{n+1} (1 - at)^{\alpha - n - 1}$, donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n+1) p_{n+1} \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1} (x - t)^n dt.$$

b) Pour $t \in [0, x]$, $x - t \geq 0$ et $1 - at > 0$; de plus $(1 - at) - (x - t) = (1 - x) + t(1 - a) \geq 0$.
Donc $0 \leq \frac{x-t}{1-at} \leq 1$ et

$$0 \leq (1 - at)^{\alpha - n - 1} (x - t)^n = (1 - at)^{\alpha - 1} \left(\frac{x - t}{1 - at} \right)^n \leq (1 - at)^{\alpha - 1}.$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1} (x - t)^n dt \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} dt.$$

c) D'après 4.c), la série $\sum k p_k$ converge, donc $(n+1) p_{n+1} \rightarrow 0$. Le reste de a) tend vers 0 par b), donc $\sum_{k=0}^n p_k x^k \rightarrow f(x)$:

$$G(x) = p_0(1 - ax)^\alpha.$$

$G(1) = \sum p_k = 1 = p_0(1-a)^\alpha$, donc $p_0 = (1-a)^{-\alpha}$. Enfin $G = f$ sur $[0, 1]$, donc $G'(1) = f'(1) = -a\alpha p_0(1-a)^{\alpha-1} = \frac{a+b}{1-a}$:

$$p_0 = (1-a)^{-\alpha} = (1-a)^{\frac{a+b}{a}}, \quad G'(1) = \frac{a+b}{1-a} = \mathbb{E}(N).$$

Problème – Partie 3 – Formule de récursivitéLoi de la somme aléatoire $S = X_1 + \dots + X_N$: formule de Panjer.**Corrigé – Problème.**

Préliminaire. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $[S = m] \cap [N = n] = [S_n = m] \cap [N = n]$, et S_n (fonction de $X_1, \dots, X_n$) est indépendante de N (lemme des coalitions). Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(S_n = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = m). \quad (*)$$

9. $\mathbb{P}(S = 0)$ quand $0 < a < 1$.

Les X_k étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, $[S_n = 0] = \bigcap_{k=1}^n [X_k = 0]$, de probabilité q_0^n (indépendance), avec $q_0 = \mathbb{P}(X_1 = 0)$. D'après (*) et la partie 2 ($q_0 \in [0, 1]$) :

$$\mathbb{P}(S = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n q_0^n = G(q_0) = p_0(1 - a q_0)^\alpha = \left(\frac{1 - a q_0}{1 - a} \right)^\alpha.$$

10. Cas poissonnien.

a) De même, si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(S = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} q_0^n = e^{-\lambda(1-q_0)}.$$

b) y compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ (`rd.random()` < 1/2 a lieu avec probabilité $\frac{1}{2}$) :

$$\text{simuX}(n) \text{ simule la loi binomiale } \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}).$$

c) On ajoute N simulations indépendantes de la loi de X_1 :

```
def simulS(lam, n):
    N = rd.poisson(lam)
    s = 0
    for k in range(N):
        x = simuX(n)
        s = s + x
    return s
```

11. Espérances conditionnelles.

a) Supposons $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$ (sinon l'espérance conditionnelle n'est pas définie). Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $T_i = \sum_{l \neq i} X_l$ est indépendante de X_i (lemme des coalitions) et a même loi que S_n (somme de n variables indépendantes de même loi), donc

$$\mathbb{P}([X_i = j] \cap [S_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_i = j] \cap [T_i = k - j]) = q_j \mathbb{P}(S_n = k - j),$$

qui ne dépend pas de i . Sur $[S_{n+1} = k]$, $X_i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, donc $\mathbb{E}(X_i \mid S_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^k j \frac{q_j \mathbb{P}(S_n = k-j)}{\mathbb{P}(S_{n+1} = k)}$ existe et ne dépend pas de i . Par linéarité,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_i \mid S_{n+1} = k) = \mathbb{E}(S_{n+1} \mid S_{n+1} = k) = k.$$

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \mathbb{E}(X_i \mid S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

- b)** C'est le calcul précédent avec $i = n+1$ ($T_{n+1} = S_n$), le premier membre valant $\mathbb{P}([X_{n+1} = j] \cap [S_{n+1} = k])$ (y compris lorsque $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, les deux membres étant alors nuls) :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = q_j \mathbb{P}(S_n = k-j).$$

- c)** Supposons $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$. Les $[X_{n+1} = j]$, $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, recouvrent $[S_{n+1} = k]$, donc d'après b) :

$$\sum_{j=0}^k q_j \mathbb{P}(S_n = k-j) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k),$$

$$\sum_{j=0}^k j q_j \mathbb{P}(S_n = k-j) = \mathbb{E}(X_{n+1} \mid S_{n+1} = k) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

En combinant (multiplier la première par a , la seconde par $\frac{b}{k}$) :

$$\boxed{\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S_n = k-j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

Si $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, chaque $q_j \mathbb{P}(S_n = k-j)$ est nul d'après b) et l'égalité est triviale.

12. Formule de récursivité.

- a)** C'est (*) avec $m = k-j$:

$$\boxed{\mathbb{P}(S = k-j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k-j).$$

- b)** Par a), puis par linéarité (somme finie sur j de séries convergentes), 11.c) et la relation de Panjer $p_{n+1} = (a + \frac{b}{n+1})p_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k-j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S_n = k-j) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k). \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k-j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

- c)** D'après (*) avec $m = k \geq 1$, le terme $n = 0$ est nul ($S_0 = 0$), et en décalant l'indice :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

- d)** D'après b) et c), $\sum_{j=0}^k (a + \frac{bj}{k}) q_j \mathbb{P}(S = k - j) = \mathbb{P}(S = k)$. Le terme $j = 0$ vaut $aq_0 \mathbb{P}(S = k)$, donc $(1 - aq_0) \mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=1}^k (a + \frac{bj}{k}) q_j \mathbb{P}(S = k - j)$. Enfin $1 - aq_0 > 0$: si $a \leq 0$, $1 - aq_0 \geq 1$; si $0 < a < 1$, $aq_0 \leq a < 1$.

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j).$$