

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2018

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.</i>	2
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : suites ; fonctions de plusieurs variables ; séries ; Python.</i>	3
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python.</i>	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique. Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tX\bar{X}}$.

On considère u et v , deux endomorphismes de E , et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E .

Partie 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2.
 - a) Vérifier que les endomorphismes u , v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
 - b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
 - c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3.
 - a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
 - b) Pour quelle(s) valeur(s) de a , $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie 2. On revient dans cette partie au cas général, où n désigne un entier tel que $n \geq 2$. On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose $C = BAB$.

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|BX\|^2 = \langle BX, X \rangle.$$

En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|BX\| \leq \|X\|$.

5. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit λ une valeur propre de C et X un vecteur propre associé.
 - a) Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
 - b) En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.
7. Soit μ une (éventuelle) valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.
 - a) Montrer que BX est un vecteur propre de C .
 - b) Montrer $ABX = \mu AX$. En déduire que $AX = X$.
 - c) Montrer que $\langle X, BX \rangle = \mu \|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0; 1]$.

2 Exercice 2

Thèmes abordés : suites ; fonctions de plusieurs variables ; séries ; Python.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
 b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi + 1)$ et $(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1})$.
 c) Étudier la nature des points critiques de f .
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
4. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geq 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

```
def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2, n + 1):
        # a compléter
    return # a compléter
```

- b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ , que l'on déterminera, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

- c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
5. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.
- a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
- b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.
- c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

- d) Montrer que $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

3 Problème

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer. On dit qu'une variable aléatoire N , à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que

$$\mathbb{P}(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose dans cette question que $a = 0$ et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0)$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose dans cette question que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(N = k) = 0$.

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a .

3. On suppose dans cette question que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1).$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p .

4. On revient dans cette question au cas général : $a < 1$, $b \in \mathbb{R}$, et N vérifie la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.

b) Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

c) En déduire que la suite $((1-a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k))_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b .

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$.

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b .

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice. On notera dans la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(N = k)$, où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, la série $\sum_{k \geq 0} p_k x^k$ est convergente. On appelle alors *fonction génératrice* de N la fonction G définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall x \in [0; 1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) x^k.$$

On suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et $\frac{b}{a} > 0$.

On pose $\alpha = -\frac{a+b}{a}$ et $f(x) = p_0(1-ax)^\alpha$ pour tout $x \in [0; 1]$.

6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$,

$$f^{(k)}(x) = k! p_k (1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0; 1]$.

- a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n+1)p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt.$$

- b) Vérifier que, pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt.$$

- c) En déduire que $G(x) = p_0(1-ax)^\alpha$. En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a , b et α , et vérifier que $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Partie 3 – Formule de récursivité. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1. On considère alors la variable aléatoire S définie par

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{k=1}^N X_k & \text{si } N \geq 1. \end{cases}$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$ et $S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$ sinon.

9. Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$ lorsque $a \in]0; 1[$ à l'aide de la partie 2.
10. a) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ .
- b) On considère la fonction Python suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k .

```
from random import random

def simuX(n):
    y = 0
    for i in range(1, n + 1):
        if random() < 1 / 2:
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simuX`? Préciser ses paramètres.

- c) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ , et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simuX`. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S .

```
def simulS(lam, n):
    N = # simulation d'une loi de Poisson de parametre lam
    # a completer
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ et, pour tout $k \geq 0$, $q_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Enfin, pour tout entier $n \geq 1$, on considère la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, en convenant que $S_0 = 0$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, $\mathbb{E}(X_i \mid S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}$. *Indication* : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_i \mid S_{n+1} = k)$.

- b) Justifier que, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = q_j \mathbb{P}(S_n = k - j).$$

- c) Dédurre des deux questions précédentes que

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- a) Montrer que, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k - j).$$

- b) Montrer que

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

- c) Justifier que $\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k)$.

- d) En déduire finalement que

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j).$$