EDHEC (Clermont)

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Une densité et sa simulation

$f(x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$; fonction de répartition, loi de $F(X)$, méthode d'inversion.

Corrigé – Exercice 1.

On remarque que $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}$ (multiplier numérateur et dénominateur par e^{2x}) et on pose $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x}) - \mathrm{e}^{2x}\cdot 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2} = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2} = f(x).$$

1. Parité.

Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})^2} = f(x)$:

$$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

2. f est une densité.

f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{-\infty} g = 0$ et $\lim_{+\infty} g = 1$, pour $A < B$ on a $\int_A^B f = g(B) - g(A)$, qui tend vers $1 - 0$ quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

3. Moments.

a) Pour tout x, $f(x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^{|x|}+\mathrm{e}^{-|x|})^2} \leq 2\mathrm{e}^{-2|x|}$. Donc $x^2\cdot|x|f(x) \leq 2|x|^3\mathrm{e}^{-2|x|} \to 0$ en $\pm\infty$ (croissances comparées) : $|x|f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. X admet une espérance, et $x \mapsto xf(x)$ est impaire :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0.}$$

b) De même $x^2\cdot x^2 f(x) \leq 2x^4\mathrm{e}^{-2|x|} \to 0$, donc $\int x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge : X admet un moment d'ordre 2.

$$\boxed{X \text{ admet une variance.}}$$

4. F **est une bijection.**

F est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable de dérivée $f > 0$: elle est strictement croissante. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0 et 1. Par le théorème de la bijection :

$$\boxed{F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$

5. La variable $Y = F(X)$**.**

a) Y prend ses valeurs dans $]0,1[$. Pour $y \in]0,1[$, comme F est strictement croissante,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Pour $y \leq 0$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ et pour $y \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$.

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[).}$$

b) F et g ont la même dérivée f et la même limite 0 en $-\infty$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}.}$$

c) Pour $y \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = y \iff \mathrm{e}^{2x} = y(1+\mathrm{e}^{2x}) \iff \mathrm{e}^{2x}(1-y) = y \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x}{1-x}\Big).}$$

d) Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors pour tout x, $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x)$: $F^{-1}(U)$ a la loi de X. D'où le script :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
U = rd.random()
X = np.log(U / (1 - U)) / 2      # X = F^(-1)(U)
print(X)
```

Exercice 2

Exercice 2 – Nilpotence en dimension 2

A nilpotente $\iff A^2 = 0$; f nilpotent $\iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$; un nilpotent n'est pas composé de deux nilpotents.

Corrigé – Exercice 2.

Partie I – Matrices nilpotentes.

1. Une relation.

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ et $(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\boxed{A^2 - (a+d)A = (bc-ad)I_2.}$$

2. Cas nilpotent.

a) Si $ad - bc \neq 0$, alors $A \cdot \frac{A-(a+d)I_2}{bc-ad} = I_2$: A est inversible, donc A^k aussi, ce qui contredit $A^k = 0$.

$$\boxed{ad - bc = 0.}$$

b) Si $k = 1$, $A = A^1 = 0$, ce qui est exclu.

$$\boxed{k \geq 2.}$$

c) D'après 1 et a), $A^2 = (a+d)A$, puis par récurrence $A^m = (a+d)^{m-1}A$ pour $m \geq 1$. Ainsi $0 = A^k = (a+d)^{k-1}A$ avec $A \neq 0$ et $k-1 \geq 1$, donc $(a+d)^{k-1} = 0$:

$$\boxed{a + d = 0.}$$

3. Conclusion.

Si A est nilpotente, 1 et 2 donnent $A^2 = (a+d)A + (bc-ad)I_2 = 0$. Réciproquement, si $A^2 = 0$, comme $A \neq 0$, A est nilpotente d'indice 2.

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff A^2 = 0.}$$

Partie II – Endomorphismes nilpotents.

1. Caractérisation.

a) Pour $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, donc $f(f(x)) = 0$:

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \implies f^2 = 0.}$$

b) Si $y = f(x)$, $f(y) = f^2(x) = 0$: $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\operatorname{rg} f \leq \dim \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{rg} f \leq 1$; comme $f \neq 0$, $\operatorname{rg} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. L'inclusion entre deux espaces de même dimension finie est une égalité.

$$\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f, \quad \operatorname{rg} f = 1, \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.}$$

c) Soit A la matrice de f dans une base de E ($A \neq 0$). f est nilpotent si et seulement si A l'est, si et seulement si $A^2 = 0$ (partie I), c'est-à-dire $f^2 = 0$; d'après a) et b), cela équivaut à $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.}$$

2. Réduction.

Comme $f \neq 0$, il existe $e_2 \in E$ tel que $f(e_2) \neq 0$; posons $e_1 = f(e_2) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, donc $f(e_1) = 0$. Si $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, en appliquant f : $\beta e_1 = 0$, donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. La famille (e_1, e_2) est libre, de cardinal $2 = \dim E$: c'est une base, et $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$.

$$\boxed{\text{Dans la base } (f(e_2), e_2), \text{ la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. f n'est pas composé de deux nilpotents.

a) $f(x) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$; si $v(x) = 0$, $f(x) = u(0) = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f.}$$

b) u et v sont non nuls (sinon $f = 0$) et nilpotents : d'après 1.b) et 1.c), $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v = 1$, donc $\dim \operatorname{Ker} v = 1$. Comme $\operatorname{rg} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, les inclusions de a) sont entre espaces de même dimension :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} f.}$$

c) D'après 1.c) appliquée à u, v et f :

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} v, \qquad \boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v.}$$

d) Alors pour tout x, $v(x) \in \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$, donc $f(x) = u(v(x)) = 0$: $f = 0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de nilpotents } u, v \text{ tels que } f = u \circ v.}$$

Exercice 3

Exercice 3 – Extrema de $f_n(x) = (\sum x_k)\exp(-\sum x_k^2)$

Spectre de J_n, hessienne, extrema locaux puis globaux.

Corrigé – Exercice 3.

On note $s = \sum_{k=1}^n x_k$ et $Q = \sum_{k=1}^n x_k^2$, de sorte que $f_n(x) = s\,\mathrm{e}^{-Q}$.

1. La matrice J_n.

a) Toutes les colonnes de J_n sont égales à $V_n \neq 0$: $\operatorname{rg} J_n = 1$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} J_n = n - 1 \geq 1$.

$$\boxed{\operatorname{rg} J_n = 1, \quad 0 \in \operatorname{Sp}(J_n), \quad \dim E_0(J_n) = n - 1.}$$

b) Chaque coefficient de $J_n V_n$ vaut n :

$$\boxed{J_n V_n = n V_n, \quad V_n \neq 0 \ : \ V_n \text{ est vecteur propre associé à } n.}$$

c) La somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus n ; E_0 est de dimension $n-1$ et E_n de dimension au moins 1, donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(J_n) = \{0, n\}.}$$

2. Régularité.

s et Q sont polynomiales, exp est de classe $\mathcal{C}^2$: par composition et produit,

$$\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$$

3. Points critiques.

a) $\partial_i s = 1$ et $\partial_i Q = 2x_i$, donc $\partial_i(f_n)(x) = \mathrm{e}^{-Q} + s(-2x_i)\mathrm{e}^{-Q}$:

$$\boxed{\partial_i(f_n)(x) = \Big(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k\Big)\exp\Big(-\sum_{k=1}^n x_k^2\Big).}$$

b) x est critique si et seulement si $2x_i s = 1$ pour tout i. Alors $s \neq 0$ et tous les x_i valent $c = \frac{1}{2s}$; donc $s = nc$ et $2nc^2 = 1$, soit $c = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Réciproquement, ces deux points conviennent.

$$\boxed{\text{Les points critiques sont } a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, \ldots, 1) \text{ et } b = -a.}$$

4. Hessienne.

a) En dérivant $\partial_i f_n = (1 - 2x_i s)\mathrm{e}^{-Q}$ par rapport à x_j (avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon) :

$$\boxed{\partial^2_{j,i}(f_n)(x) = \big(-2\delta_{ij}s - 2x_i - 2x_j + 4x_i x_j s\big)\exp\Big(-\sum_{k=1}^n x_k^2\Big).}$$

b) En a : $x_i = c = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, $s = nc$, $Q = nc^2 = \frac{1}{2}$ et $4c^2 s = 4nc^3 = 2c$. Donc, pour $i \neq j$, $\partial^2_{j,i} f_n(a) = (-4c + 2c)\mathrm{e}^{-1/2} = -2c\,\mathrm{e}^{-1/2}$, et $\partial^2_{i,i} f_n(a) = (-2nc - 4c + 2c)\mathrm{e}^{-1/2} = -2c(n+1)\mathrm{e}^{-1/2}$. Ainsi $\nabla^2 f_n(a) = -2c\,\mathrm{e}^{-1/2}(nI_n + J_n)$ avec $2c\,\mathrm{e}^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{2n}\sqrt{\mathrm{e}}}$:

$$\boxed{H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2n\mathrm{e}}}(nI_n + J_n).}$$

c) Si $J_n X = \lambda X$, alors $(nI_n + J_n)X = (n + \lambda)X$. D'après 1.c) ($J_n$ symétrique, diagonalisable, valeurs propres 0 et n), les valeurs propres de $nI_n + J_n$ sont n et $2n$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}(H_n(a)) = \Big\{-\frac{2n}{\sqrt{2n\mathrm{e}}},\ -\frac{4n}{\sqrt{2n\mathrm{e}}}\Big\}.}$$

d) Les valeurs propres de la hessienne au point critique a sont strictement négatives :

$$\boxed{f_n \text{ admet un maximum local en } a, \text{ égal à } f_n(a) = \sqrt{\tfrac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{-1/2}.}$$

e) $f_n(-x) = -f_n(x)$. Si $f_n(x) \leq f_n(a)$ pour x voisin de a, alors $f_n(y) = -f_n(-y) \geq -f_n(a) = f_n(b)$ pour y voisin de b.

$$\boxed{f_n \text{ admet un minimum local en } b, \text{ égal à } -\sqrt{\tfrac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{-1/2}.}$$

5. Extrema globaux.

a) $h'(t) = (1 - 2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$: h croît sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et décroît sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, avec $h(0) = 0$, $\lim_{+\infty} h = 0$ (croissances comparées).

$$\boxed{\max_{\mathbb{R}_+} h = h\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}}.}$$

b) Avec $u = (1, \ldots, 1)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz $\langle u, x\rangle^2 \leq \|u\|^2\|x\|^2$ s'écrit

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2.}$$

c) D'après b) puis a) avec $t = \sqrt{Q} \geq 0$:

$$|f_n(x)| = |s|\,\mathrm{e}^{-Q} \leq \sqrt{n}\sqrt{Q}\,\mathrm{e}^{-Q} = \sqrt{n}\,h(\sqrt{Q}) \leq \sqrt{n}\frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}} = f_n(a).$$

Ainsi $f_n(b) = -f_n(a) \leq f_n(x) \leq f_n(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{f_n \text{ admet un maximum global en } a \text{ et un minimum global en } b.}$$

6. Informatique.

a) On construit $nI_n + J_n$ à l'aide de `np.eye` et `np.ones` :

```
import numpy as np
n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
H = -2 / np.sqrt(2 * n * np.e) * (n * np.eye(n) + np.ones((n, n)))
print(H)
```

b) Pour $n = 2$, f_2 est impaire, nulle sur la droite $x_1 + x_2 = 0$, positive au-dessus et négative en dessous, tend vers 0 à l'infini, et atteint son maximum $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}61$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et son minimum $-\mathrm{e}^{-1/2}$ en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La nappe proposée présente exactement ces caractéristiques : une seule bosse de hauteur environ 0,6 du côté $x_1 + x_2 > 0$, un seul creux symétrique, et une surface quasi plane loin de l'origine.

Oui, la nappe est compatible avec les propriétés de f_2.

Problème

Problème – Rang du k-ième pile et première série de k piles

S_k : rang du k-ième pile ; T_k : fin de la première série de k piles consécutifs.

Corrigé – Problème.

Partie I – Simulations.

1. Simulation de S_k.

On compte dans `c` les piles obtenus ; la boucle s'arrête au k-ième pile, dont le rang est `n` :

```
    if rd.random() < p:
        c = c + 1
print(n)
```

2. Simulation de T_k.

`c` compte maintenant la longueur de la série de piles en cours ; un face la remet à zéro :

```
    if rd.random() < p:
        c = c + 1
    else:
        c = 0
```

Partie II – Espérance de S_k.

1. Loi de S_1.

S_1 est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p :

$$\boxed{S_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \qquad \mathbb{E}(S_1) = \frac{1}{p}.}$$

2. Loi de S_k.

a) X_{n-1} compte les succès dans $n-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p :

$$\boxed{X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p).}$$

b) Il faut au moins k lancers pour obtenir k piles. Le k-ième pile a lieu au rang n si et seulement si le n-ième lancer donne pile et les $n-1$ premiers donnent exactement $k-1$ piles.

$$\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![, \qquad [S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap P_n.}$$

c) X_{n-1} ne dépend que des $n-1$ premiers lancers, donc est indépendante de P_n :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad \mathbb{P}(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \cdot p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.}$$

3. Décomposition de S_k.

a) Z_i est le nombre de lancers effectués après le $(i-1)$-ième pile jusqu'au i-ième pile inclus : c'est le rang du premier succès dans la suite d'épreuves de Bernoulli

indépendantes de paramètre p qui suivent le rang S_{i-1}.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

b) Par télescopage :

$$\boxed{S_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i.}$$

c) Chaque Z_i admet une espérance $\frac{1}{p}$; par linéarité :

$$\boxed{\mathbb{E}(S_k) = \frac{k}{p}.}$$

4. Estimation de p.

a) Les Z_i sont indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$, et admettent une variance $\frac{q}{p^2}$. Par la loi faible des grands nombres :

$$\boxed{\overline{Z_k} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{p}.}$$

b) $\frac{k}{S_k} = \frac{1}{\overline{Z_k}}$ ne dépend que des observations. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$ et la variable certaine $\frac{1}{p}$ est dans I ; d'après le résultat admis, $\frac{k}{S_k} \to p$ en probabilité.

$$\boxed{\frac{k}{S_k} \text{ est un estimateur convergent de } p.}$$

c) Les événements $[S_{k-1} = j]$, $j \geq k-1$, forment un système complet :

$$\boxed{\sum_{j=k-1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = j) = 1.}$$

Pour $n \geq k \geq 2$, $\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2}$. Par le théorème de transfert (série à termes positifs), en posant $j = n-1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} &= p \sum_{j=k-1}^{+\infty} \binom{j-1}{k-2} p^{k-1} q^{j-(k-1)} \\ &= p \sum_{j=k-1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = j) = p,\end{aligned}$$

où l'on a reconnu la loi de S_{k-1} (question 2.c, valable aussi pour $k-1=1$).

$$\boxed{\frac{k-1}{S_k - 1} \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\Big(\frac{k-1}{S_k-1}\Big) = p.}$$

d) Pour $n \geq k$, $\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n-1} = \frac{n-k}{n(n-1)} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $n = k$. Ainsi $D = \frac{k}{S_k} - \frac{k-1}{S_k - 1}$ est positive, bornée, et $D \geq \frac{1}{(k+1)k}$ sur $[S_k = k+1]$, événement de probabilité non nulle. Donc

$$\mathbb{E}\Big(\frac{k}{S_k}\Big) - p = \mathbb{E}(D) \geq \frac{\mathbb{P}(S_k = k+1)}{k(k+1)} > 0.$$

$$\boxed{\frac{k}{S_k} \text{ est un estimateur biaisé de } p \text{ (de biais strictement positif).}}$$

Partie III – Espérance de T_k.

1. Cas $k = 1$.

La première série d'un pile se termine au premier pile :

$$\boxed{T_1 = S_1.}$$

2. Conditionnements.

a) W est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On a $F_1 = [W = 1]$, $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i = [W = i]$ pour $2 \leq i \leq k$ et $P_1 \cap \cdots \cap P_k = [W > k]$. Les événements $[W = 1], \ldots, [W = k], [W > k]$ sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω.

$$\boxed{\text{Ces } k+1 \text{ événements forment un système complet d'événements.}}$$

b) Notons T'_k la variable définie comme T_k mais à partir des lancers $2, 3, \ldots$ (le lancer 2 étant compté comme premier). Elle ne dépend que des lancers $2, 3, \ldots$, qui sont indépendants et de même loi que la suite complète : T'_k a même loi que T_k et est indépendante de F_1. Sur F_1, aucune série de piles ne contient le lancer 1, donc $T_k = 1 + T'_k$. Pour $n \geq k$:

$$\mathbb{P}_{F_1}(T_k = n) = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap [T'_k = n-1])}{\mathbb{P}(F_1)} = \mathbb{P}(T'_k = n-1) = \mathbb{P}(T_k = n-1).$$

Par conséquent, avec $m = n - 1$,

$$\mathbb{E}(T_k \mid F_1) = \sum_n n\mathbb{P}(T_k = n-1) = \sum_m (m+1)\mathbb{P}(T_k = m) = \mathbb{E}(T_k) + 1.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k \mid F_1) = 1 + \mathbb{E}(T_k).}$$

c) Pour $2 \leq i \leq k$, sur $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$, les $i - 1 < k$ premiers piles ne forment pas une série de longueur k et le face au rang i l'interrompt ; tout recommence au rang $i + 1$. Le même raisonnement donne $T_k = i + T_k^{(i)}$, avec $T_k^{(i)}$ indépendante de l'événement et de même loi que T_k :

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k \mid P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = i + \mathbb{E}(T_k).}$$

d) Sur $P_1 \cap \cdots \cap P_k$, la première série de k piles se termine au rang k : $T_k = k$ (variable certaine sur cet événement).

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k \mid P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k.}$$

3. Calcul de $\mathbb{E}(T_k)$.

a) Par la formule de l'espérance totale avec le système complet de 2.a), et $\mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = p^{i-1}q$, $\mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_k) = p^k$ (indépendance), puis $j = i - 1$:

$$\mathbb{E}(T_k) = \sum_{i=1}^{k} (i + \mathbb{E}(T_k))p^{i-1}q + kp^k,$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j q + \mathbb{E}(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.}$$

b) $\sum_{j=0}^{k-1} p^j q = 1 - p^k$, donc $p^k \mathbb{E}(T_k) = q \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j + kp^k$. En dérivant $x \mapsto \sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j = \frac{1 - (k+1)p^k + kp^{k+1}}{q^2}.$$

D'où $p^k \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{1 - (k+1)p^k + kp^{k+1} + kp^k q}{q} = \dfrac{1-p^k}{q}$ (car $kp^k q = kp^k - kp^{k+1}$).

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.}$$

4. Une inégalité.

Au rang T_k, au moins k piles ont été obtenus, donc le k-ième pile est apparu : $S_k \leq T_k$, et par croissance de l'espérance $\mathbb{E}(S_k) \leq \mathbb{E}(T_k)$ (aussi pour $k = 1$, où $T_1 = S_1$ et la formule de 3.b) reste vraie). D'après II.3.c) et III.3.b) :

$$\frac{k}{p} \leq \frac{1-p^k}{qp^k} \iff kqp^{k-1} \leq 1 - p^k \iff kp^{k-1} - kp^k \leq 1 - p^k$$

(on a multiplié par $qp^k > 0$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.}$$