

EDHEC (épreuve annulée)

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – La suite (u_n) définie par $f(u_n) = n$

$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$; divergence de $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et de $\sum (1 - u_n)$.

Corrigé – Exercice 1.

1. La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

- a) Sur $[2, +\infty[$, $t \mapsto t \ln t$ est strictement positive et croissante, donc $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante. Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$, et en intégrant sur un intervalle de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- b) Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln t)$. En sommant a) pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=2}^n a_k \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\sum_{n \geq 2} a_n \text{ diverge.}$$

2. Régularité en 0.

- a) Sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$, $1-x > 0$ et $\ln(1-x) \neq 0$: f est continue comme quotient de fonctions continues. En 0, $\ln(1-x) \sim -x$ et $1-x \rightarrow 1$, donc $f(x) \sim \frac{-x}{-x} \rightarrow 1 = f(0)$.

$$f \text{ est continue sur }] -\infty, 1[.$$

- b) Avec $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$: $(1-x)\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$f(x) = \frac{-x}{-x(1 - \frac{x}{2} + o(x))} = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 :

$$f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

3. Variations.

- a) Sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, f est dérivable comme quotient. Avec $D(x) = (1-x) \ln(1-x)$, $D'(x) = -\ln(1-x) - 1$ et

$$f'(x) = \frac{-D(x) + xD'(x)}{D(x)^2} = \frac{-(1-x) \ln(1-x) - x \ln(1-x) - x}{D(x)^2},$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x) + x}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)}.$$

- b) Soit $\psi(x) = \ln(1-x) + x$ sur $] -\infty, 1[$: $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$, positive sur $] -\infty, 0]$ et négative sur $[0, 1[$. Donc ψ admet un maximum en 0, égal à 0 : $\psi(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

$$\ln(1-x) + x \leq 0 \text{ (nul seulement en 0); } f \nearrow \text{ strictement sur }] -\infty, 1[.$$

(f est continue et sa dérivée est strictement positive sauf en 0.)

- c) En $-\infty$: $\frac{-x}{1-x} \rightarrow 1$ et $\ln(1-x) \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0$. En 1^- : $(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0^-$ (croissances comparées) et $-x \rightarrow -1$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$		+	+
f	0	1	$+\infty$

(En 0, $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ d'après 2.b.)

4. La suite (u_n) .

- a) f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$, avec $f(0) = 1$ et $\lim_{1^-} f = +\infty$: elle réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$, qui contient tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! u_n \in [0, 1[, f(u_n) = n ; \quad u_1 = 0.$$

- b) f^{-1} est strictement croissante, donc $(u_n) = (f^{-1}(n))$ est croissante et majorée par 1 : elle converge vers $\ell \leq 1$ (théorème de la limite monotone). Si $\ell < 1$, alors $n = f(u_n) \leq f(\ell)$ pour tout n , ce qui est absurde.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- c) Pour $n \geq 2$, avec $x_n = 1 - n^{-3/2} \in] 0, 1[$: $1 - x_n = n^{-3/2}$ et $\ln(1 - x_n) = -\frac{3}{2} \ln n$, donc

$$f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{1 - n^{-3/2}}{n^{-3/2} \cdot \frac{3}{2} \ln n} = \frac{2(n\sqrt{n} - 1)}{3 \ln n} \quad (\text{et } f(0) = 1 \text{ pour } n = 1).$$

Or $\frac{1}{n} f(x_n) = \frac{2(\sqrt{n} - n^{-1})}{3 \ln n} \rightarrow +\infty$ (croissances comparées), donc il existe n_0 tel que $f(x_n) \geq n = f(u_n)$ pour $n \geq n_0$; par croissance stricte de f :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

d) Pour $n \geq \max(n_0, 2)$, $u_n > 0$ et $1 - u_n \geq n^{-3/2}$, donc $0 < -\ln(1 - u_n) \leq \frac{3}{2} \ln n$ et

$$\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \geq \frac{2}{3n \ln n} = \frac{2}{3} a_n.$$

La série $\sum a_n$ diverge (question 1) ; par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \text{ diverge.}}$$

e) Pour $n \geq 2$, $f(u_n) = n$ s'écrit $1 - u_n = \frac{u_n}{-n \ln(1 - u_n)}$. Comme $u_n \rightarrow 1$, $1 - u_n \sim$

$\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ (termes positifs). Par équivalence :

$$\boxed{\sum (1 - u_n) \text{ diverge.}}$$

Exercice 2

Exercice 2 – Méthode probabiliste

Existence de signes ou de choix 0/1 contrôlant la norme d'une combinaison de vecteurs.

Corrigé – Exercice 2.

1. Combinaisons à coefficients ± 1 .

- a) Si $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes d'espérance 0 ; si $i = j$, $X_i^2 = 1$.

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \quad \mathbb{E}(X_i^2) = 1.$$

- b) Par bilinéarité du produit scalaire, $X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \langle u_i, u_j \rangle$, combinaison linéaire de variables bornées. X admet une espérance et, par linéarité et a) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = n.$$

- c) $X(\omega) = \|w_{x(\omega)}\|^2$ avec $x(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \{-1, 1\}^n$. Chaque $x \in \{-1, 1\}^n$ est obtenu avec probabilité 2^{-n} (indépendance), donc

$$n = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1, 1\}^n} \|w_x\|^2.$$

La moyenne des 2^n nombres $\|w_x\|^2$ vaut n : l'un au moins est $\leq n$ et l'un au moins est $\geq n$.

$$\exists x, x' \in \{-1, 1\}^n, \quad \|w_x\| \leq \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \|w_{x'}\| \geq \sqrt{n}.$$

2. Combinaisons à coefficients 0/1.

- a) $\mathbb{E}(p_i - Y_i) = 0$. Si $i \neq j$, par indépendance, $\mathbb{E}((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)) = 0$; si $i = j$, c'est $\mathbb{V}(Y_i)$.

$$\mathbb{E}((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ p_i(1 - p_i) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- b) $Y = \sum_{i,j} (p_i - Y_i)(p_j - Y_j) \langle v_i, v_j \rangle$ est une combinaison linéaire de variables bornées, donc admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) \|v_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{4},$$

car $p(1 - p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ et $\|v_i\| \leq 1$.

$$\mathbb{E}(Y) \leq \frac{n}{4}.$$

- c) $Y(\omega) = \|z - y_{x(\omega)}\|^2$ avec $x(\omega) = (Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)) \in \{0, 1\}^n$. Si l'on avait $\|z - y_x\|^2 > \frac{n}{4}$ pour tout $x \in \{0, 1\}^n$, la variable Y , qui prend un nombre fini de valeurs toutes $> \frac{n}{4}$, aurait une espérance $> \frac{n}{4}$: contradiction.

$$\exists x \in \{0, 1\}^n, \quad \|z - y_x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Exercice 3

Exercice 3 – Retours à l'origine

$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ indépendantes ; rangs Y et Z des deux premiers retours en 0.

Corrigé – Exercice 3.

1. Loi de X_n .

a)

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket) : \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

b) X_n prend un nombre fini de valeurs, donc admet espérance et variance. $X_n + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$, d'espérance $\frac{n+2}{2}$ et de variance $\frac{(n+1)^2-1}{12}$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}, \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{n(n+2)}{12}.$$

2. Premier retour.

a)

$$[Y = n] = [X_1 \neq 0] \cap \dots \cap [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0].$$

b) Par indépendance mutuelle :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

c) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc $\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(Y = n) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1.$$

d) $n\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente (harmonique).

$$Y \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

3. Série harmonique.

a) Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$; en intégrant sur $[k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

b) En sommant pour $k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$ (télescopage) : $\sum_{k=2}^j \frac{1}{k} \leq \ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$. La première inégalité donne $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^j \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{j} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}$.

$$\ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}.$$

- c) En divisant par $\ln j > 0$: $1 \leq \frac{1}{\ln j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1-1/j}{\ln j} \rightarrow 1$. Par encadrement :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln j.$$

4. Deuxième retour.

- a) Le deuxième retour a lieu strictement après le premier : si $i \geq j$, $[Y = i] \cap [Z = j] = \emptyset$.

$$\forall i \geq j, \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z = j) = 0.$$

- b) Pour $i \leq j-1$, $[Y = i] \cap [Z = j] = [Y = i] \cap [X_{i+1} \neq 0] \cap \dots \cap [X_{j-1} \neq 0] \cap [X_j = 0]$. L'événement $[Y = i]$ ne dépend que de $X_1, \dots, X_i$; par indépendance mutuelle (lemme des coalitions) :

$$\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j]) = \mathbb{P}(Y = i) \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{j+1} = \mathbb{P}(Y = i) \frac{i+1}{j} \cdot \frac{1}{j+1}.$$

$$\forall i \leq j-1, \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.$$

- c) Les événements $[Y = i]$, $i \in \mathbb{N}^*$, et $[Y \notin \mathbb{N}^*]$ (de probabilité nulle d'après 2.c) forment un système complet. Par la formule des probabilités totales, a) et b) :

$$\mathbb{P}(Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} \cdot \frac{i+1}{j(j+1)}, \quad \mathbb{P}(Z = j) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}.$$

- d) $j\mathbb{P}(Z = j) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \sim \frac{\ln j}{j}$ (question 3.c), et $\frac{\ln j}{j} \geq \frac{1}{j}$ pour $j \geq 3$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum j\mathbb{P}(Z = j)$ diverge.

$$Z \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

5. Informatique.

- a) Les positions successives sont indépendantes : l'abscisse après le n -ième déplacement suit la loi $\mathcal{U}([0, n])$.

```
import numpy.random as rd
n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = rd.randint(0, n + 1)      # abscisse apres le n-ieme deplacement
print(x)
```

- b) À la sortie de la boucle, deux retours ont eu lieu : le premier au rang y , le second au rang n .

```
print("y =", y)
print("z =", n)
```

Problème

Problème – Partie I – Intégrales de Wallis

$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$: relation de récurrence, $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$, équivalent.

Corrigé – Problème.

1. Premières propriétés.

a)

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad u_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

b) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Par croissance de l'intégrale :

$$(u_n) \text{ est décroissante.}$$

c) $\cos^n$ est continue, positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et vaut 1 en 0 : elle est minorée par $\frac{1}{2}$ sur un intervalle $[0, \eta]$ ($\eta > 0$), donc $u_n \geq \frac{\eta}{2} > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2. Calcul des u_n .

a) On intègre par parties $u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t \, dt$ avec $a(t) = \cos^{n+1} t$ et $b(t) = \sin t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a'(t) = -(n+1)\cos^n t \sin t$, $b'(t) = \cos t$:

$$u_{n+2} = [\cos^{n+1} t \sin t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n t \sin^2 t \, dt = (n+1)(u_n - u_{n+2}).$$

$$(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.$$

b) Récurrence : pour $n = 0$, $\frac{0!}{1} \cdot \frac{\pi}{2} = u_0$. Si la formule est vraie au rang n , d'après a) avec $2n$:

$$u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

c) Posons $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$. Par a), $v_{n+1} = ((n+2)u_{n+2})u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1} = v_n$: (v_n) est constante, égale à $v_0 = u_1 u_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.$$

d) Avec c) au rang $2n$ et b) :

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}, \quad u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. Équivalent.

a)

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

b) Par décroissance et positivité, $u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$, donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

c) D'après 2.c), $nu_n^2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi}{2}$, donc $nu_n^2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, soit $u_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$; comme $u_n > 0$:

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Calcul de u_n en Python.

D'après 2.c), $u_{k+1} = \frac{\pi}{2(k+1)u_k}$; en partant de $u_0 = \frac{\pi}{2}$, après n passages dans la boucle, `u` contient u_n :

```
for k in range(n):
    u = np.pi / (2 * (k + 1) * u)
```

Problème – Partie II – Variables aléatoires

X de densité $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; minimum de n copies ; simulation par inversion.

Corrigé – Problème.**5. Densité.**

f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $\frac{\pi}{2}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

f est une densité de probabilité.

6. Fonction de répartition.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7. Moments.

a) X est bornée (à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ presque sûrement), donc admet des moments de tout ordre. Par intégration par parties ($a(x) = x$, $b(x) = -\cos x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a' = 1$, $b' = \sin$) :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx, \quad \boxed{\mathbb{E}(X) = 1.}$$

b) De même ($a(x) = x^2$, $b(x) = -\cos x$, puis $a(x) = 2x$, $b(x) = \sin x$) :

$$\mathbb{E}(X^2) = [-x^2 \cos x]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = 2 \left([x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \right) = \pi - 2.$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \pi - 3.}$$

8. Le minimum I_n .

a) $[I_n > x] = \bigcap_{k=1}^n [X_k > x]$; par indépendance, $\mathbb{P}(I_n > x) = (1 - F(x))^n$, d'où $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \cos^n x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

b) Pour $x < 0$, $F_n(x) = 0$; pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos x < 1$ donc $\cos^n x \rightarrow 0$ et $F_n(x) \rightarrow 1$; pour $x > \frac{\pi}{2}$, $F_n(x) = 1$. La limite coïncide avec la fonction de répartition de la variable certaine nulle en tout point de $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire en tout point où celle-ci est continue. Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{(I_n) \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à } 0.}$$

c) F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et $\frac{\pi}{2}$; en dérivant :

$$\boxed{f_n(x) = n \cos^{n-1}(x) \sin x \text{ si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon.}}$$

I_n est bornée, donc admet un moment d'ordre 2. On intègre par parties avec $a(x) = x^2$ et $b(x) = -\cos^n x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a'(x) = 2x$, $b'(x) = n \cos^{n-1} x \sin x$:

$$\mathbb{E}(I_n^2) = \int_0^{\pi/2} x^2 n \cos^{n-1} x \sin x \, dx = [-x^2 \cos^n x]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos^n x \, dx,$$

$$\boxed{\mathbb{E}(I_n^2) = 2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)^n \, dx.}$$

d) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq x \cos^n x \leq \frac{\pi}{2} \cos^n x$; par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\mathbb{E}(I_n^2) \leq \pi u_n.}$$

e) Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Markov appliquée à I_n^2 :

$$\mathbb{P}(|I_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(I_n^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(I_n^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\pi u_n}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $u_n \rightarrow 0$ (question 3.c).

$$\boxed{(I_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à } 0.}$$

9. Simulation.

a) h est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, avec $h(0) = 1$ et $h(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par le théorème de la bijection :

$$\boxed{h \text{ réalise une bijection de } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ sur } [0, 1].}$$

- b)** $\mathbb{P}(X \in [0, \frac{\pi}{2}]) = 1$, donc $Y = h(X)$ est défini (presque sûrement), à valeurs dans $[0, 1]$. Pour $y \in [0, 1]$, h étant décroissante et X à densité :

$$G(y) = \mathbb{P}(\cos X \leq y) = \mathbb{P}(X \geq h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y)) = \cos(h^{-1}(y)) = y,$$

avec $G(y) = 0$ si $y < 0$ et $G(y) = 1$ si $y > 1$.

$$\boxed{G(y) = y \text{ sur } [0, 1] : Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).}$$

- c)** Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $\mathbb{P}(h^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \geq \cos x) = 1 - \cos x = F(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $h^{-1}(U)$ a la loi de X .

`Y = rd.random()`

`X = np.arccos(Y)`