

# EDHEC (sujet final)

Mathématiques approfondies

## Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

### Exercice 1

#### Exercice 1 – Racine de $1 - x - x^n$

$u_n \in ]0, 1[$  solution de  $1 - x - x^n = 0$  ;  $v_n = 1 - u_n \sim \frac{\ln n}{n}$ .

#### Corrigé – Exercice 1.

##### 1. Existence et unicité.

$f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f'_n(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$  :  $f_n$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , avec  $f_n(0) = 1$  et  $\lim_{+\infty} f_n = -\infty$ . Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $] -\infty, 1]$ , qui contient 0.

$f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n \in \mathbb{R}_+$ .

##### 2. Convergence de $(u_n)$ .

a)  $f_n(0) = 1 > 0$  et  $f_n(1) = -1 < 0$  ; par stricte décroissance,  $u_n \in ]0, 1[$ .

$u_n \in ]0, 1[$ .

b) Comme  $1 - u_n = u_n^n$  :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

$f_{n+1}$  étant strictement décroissante,  $u_n < u_{n+1}$ .

$f_{n+1}(u_n) > 0$  et  $(u_n)$  est (strictement) croissante.

c)  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1 : par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel  $\ell$ , et  $0 < u_n < 1$  donne  $\ell \in [0, 1]$ .

$(u_n)$  converge vers  $\ell \in [0, 1]$ .

d) Supposons  $\ell < 1$ . Alors  $0 < u_n \leq \ell$  pour tout  $n$ , donc  $0 < u_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$ . Or  $u_n^n = 1 - u_n \rightarrow 1 - \ell > 0$  : contradiction.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

**3. Équivalent de  $v_n$ .**

- a)  $v_n = 1 - u_n > 0$  car  $u_n < 1$ . De plus  $v_n = u_n^n$ , donc  $\ln(v_n) = n \ln(u_n) = n \ln(1 - v_n)$ .  
Comme  $v_n \rightarrow 0$ ,  $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$  :

$$v_n > 0 \quad \text{et} \quad \ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n.$$

- b) D'après a),  $\frac{-\ln(v_n)}{nv_n} \rightarrow 1$ , donc  $\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) \rightarrow 0$ , tandis que  $-\ln(v_n) \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

Notons  $L_n = -\ln(v_n) \rightarrow +\infty$ . Le numérateur vaut  $\ln(L_n) - \ln n + L_n$ , donc  $\frac{\ln L_n}{L_n} - \frac{\ln n}{L_n} + 1 \rightarrow 0$ . Comme  $\frac{\ln L_n}{L_n} \rightarrow 0$  (croissances comparées),  $\frac{\ln n}{L_n} \rightarrow 1$  :

$$\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n).$$

- c) D'après a),  $v_n \sim \frac{-\ln(v_n)}{n}$ , et d'après b),  $-\ln(v_n) \sim \ln n$  :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

**4. Nature des séries.**

Les termes sont positifs. Pour  $n \geq 3$ ,  $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ , et  $\sum \frac{1}{n}$  diverge : par équivalence puis comparaison,  $\sum v_n$  diverge. Ensuite  $v_n^2 \sim \frac{(\ln n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$  (croissances comparées), et  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge (Riemann).

$$\sum v_n \text{ diverge, } \quad \sum v_n^2 \text{ converge.}$$

## Exercice 2

### Exercice 2 – Endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle : \text{réduction à une matrice } \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### Corrigé – Exercice 2.

##### 1. Orthogonalité.

Avec  $y = x$  :  $\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle = -\langle f(x), x \rangle$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), x \rangle = 0.$$

##### 2. Valeurs propres.

Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle et  $x \neq 0$  tel que  $f(x) = \lambda x$ . Alors  $0 = \langle f(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$ , donc  $\lambda = 0$ . Comme  $f$  admet au moins une valeur propre réelle :

$$0 \text{ est l'unique valeur propre réelle de } f \text{ (en particulier } \dim \text{Ker } f \geq 1).$$

##### 3. Noyau et image.

Soit  $x \in \text{Ker } f$  et  $y = f(z) \in \text{Im } f$  :  $\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle f(x), z \rangle = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } f \perp \text{Im } f$ , donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$  ; par le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 3$ .

$$\text{Ker } f \text{ et } \text{Im } f \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathbb{R}^3.$$

##### 4. Cas $\dim \text{Ker } f = 3$ .

Alors  $f = 0$  et sa matrice dans n'importe quelle base est nulle :

$$\text{la forme demandée est obtenue avec } \alpha = 0.$$

##### 5. Cas $\dim \text{Ker } f = 2$ .

a)  $\text{Im } f$  est de dimension 1 ; soit  $e_1$  un vecteur unitaire de  $\text{Im } f$ , et  $(e_2, e_3)$  une base orthonormale du plan  $\text{Ker } f$ . D'après 3,  $e_1$  est orthogonal à  $e_2$  et  $e_3$  :  $(e_1, e_2, e_3)$  est une famille orthonormale de 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , donc une base orthonormale.

$$\text{Une telle base } \mathcal{B} \text{ existe.}$$

b)  $f(e_2) = f(e_3) = 0$  : les deux dernières colonnes sont nulles ; on note  $f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout  $y$ ,  $f(y) \in \text{Im } f$  ; en particulier  $f(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$ . Donc  $f(e_1) \in \text{Im } f = \text{Vect}(e_1)$ , d'où  $b = c = 0$ .

$$\text{Im } f \text{ est stable par } f \text{ et } b = c = 0.$$

- d) La base étant orthonormale,  $a = \langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$  (question 1). Alors  $f(e_1) = 0$  et  $f = 0$ , ce qui contredit  $\dim \text{Ker } f = 2$ .

$a = 0$  ; le cas  $\dim \text{Ker } f = 2$  est impossible.

**6. Cas  $\dim \text{Ker } f = 1$ .**

- a)  $\text{Im } f$  est un plan ; soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormale de  $\text{Im } f$  et  $e_3$  un vecteur unitaire de  $\text{Ker } f$ . Par 3,  $(e_1, e_2, e_3)$  est orthonormale, donc est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ .

Une telle base  $\mathcal{B}$  existe.

- b)  $f(e_3) = 0$  et  $f(e_1), f(e_2) \in \text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_2)$  : la troisième colonne et la troisième ligne sont nulles.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) La base étant orthonormale,  $a = \langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$ ,  $d = \langle f(e_2), e_2 \rangle = 0$ , et

$$c = \langle f(e_1), e_2 \rangle = -\langle e_1, f(e_2) \rangle = -b.$$

$$a = d = 0 \quad \text{et} \quad c = -b.$$

- d) Dans ce cas, la matrice est  $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , de la forme voulue avec  $\alpha = b$ . Comme  $\dim \text{Ker } f \in \{1, 2, 3\}$  (question 2) et que le cas 2 est impossible, on a traité tous les cas.

Il existe toujours une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle  $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 3

### Exercice 3 – La variable $Y = \sqrt{X}$

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$  ; loi, espérance et simulation de  $Y = \sqrt{X}$ .

#### Corrigé – Exercice 3.

##### 1. Simulation directe.

La loi  $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$  correspond à `lam = 1/2`, donc à l'argument 2 :

`X = rd.exponential(2)`

`Y = np.sqrt(X)`

##### 2. Loi de $Y$ .

a)  $Y \geq 0$ . Pour  $y < 0$ ,  $F_Y(y) = 0$  ; pour  $y \geq 0$ ,  $F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq y^2) = 1 - e^{-y^2/2}$ .

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y^2/2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

b)  $F_Y$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (en  $0 : 1 - 1 = 0$ ) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  :  $Y$  est à densité, et en dérivant là où  $F_Y$  est dérivable :

$$f_Y(y) = y e^{-y^2/2} \text{ si } y > 0, \quad f_Y(y) = 0 \text{ sinon.}$$

##### 3. Espérance de $Y$ .

a)

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = 1.$$

b)  $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = 1$  (intégrale convergente), et la fonction intégrée est paire, donc  $\int_0^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz$  converge et vaut  $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ . Or  $\int_0^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy$  (intégrale de fonction positive) : elle converge et

$$Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

##### 4. Simulation par la loi uniforme.

a)  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , donc  $e^{-X/2} \in ]0, 1]$  et  $U \in [0, 1[$  ; réciproquement, pour  $u \in [0, 1[$ ,  $U = u$  lorsque  $X = -2 \ln(1 - u) \in \mathbb{R}_+$ .

$$U(\Omega) = [0, 1[.$$

b) Pour  $u \in [0, 1[$ , la fonction  $x \mapsto 1 - e^{-x/2}$  étant strictement croissante :

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \leq -2 \ln(1 - u)) = 1 - e^{\ln(1-u)} = u,$$

avec  $F_U(u) = 0$  si  $u < 0$  et  $F_U(u) = 1$  si  $u \geq 1$ .

$$F_U(u) = u \text{ sur } [0, 1] : U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).$$

- c)**  $e^{-X/2} = 1 - U$ , donc  $X = -2 \ln(1 - U)$  et  $Y = \sqrt{-2 \ln(1 - U)}$ . Si  $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ ,  $\sqrt{-2 \ln(1 - V)}$  a donc la loi de  $Y$  :
- ```
U = rd.random()  
Y = np.sqrt(-2 * np.log(1 - U))
```

## Problème

### Problème – Processus de Poisson et dernier appel

$N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)$ , densité de  $S_n$ , accroissements poissonniens, loi de l'instant  $R_t$  du dernier appel avant  $t$ .

#### Corrigé – Problème.

##### 1. L'instant 0.

Pendant l'intervalle  $[0, 0]$ , de durée nulle, le central ne reçoit aucun appel :  $N_0 = 0$ .  
Donc  $p_0(0) = 1$  et  $p_n(0) = 0$  pour  $n \geq 1$ .

$$N_0 \text{ suit la loi certaine égale à } 0.$$

##### 2. Les fonctions $f_n$ .

a)  $f'_0(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) + e^{\lambda t} p'_0(t) = e^{\lambda t} (\lambda p_0(t) - \lambda p_0(t)) = 0$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$  :  $f_0$  est constante, égale à  $f_0(0) = p_0(0) = 1$ .

$$\forall t \geq 0, \quad f_0(t) = 1.$$

b) Pour  $n \geq 1$  :

$$f'_n(t) = e^{\lambda t} (\lambda p_n(t) + p'_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t), \quad f'_n(t) = \lambda f_{n-1}(t).$$

c) i)  $f'_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ , qui est aussi la dérivée de  $t \mapsto \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ . La différence est de dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ , donc constante :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, \quad f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + K.$$

ii) En  $t = 0$  :  $K = f_n(0) = p_n(0) = 0$ . Par récurrence à partir de  $f_0 = 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

##### 3. Loi de $N_t$ .

a)

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

b)  $N_t$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et ses probabilités sont celles de la loi de Poisson :

$$N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t) \quad (t > 0).$$

##### 4. Instants d'appel.

a) Le premier appel survient après  $t$  si et seulement si aucun appel n'est reçu dans  $[0, t]$  :  $[S_1 > t] = [N_t = 0]$ . Donc  $\mathbb{P}(S_1 > t) = e^{-\lambda t}$  pour  $t \geq 0$ , et  $S_1 \geq 0$ .

$$[S_1 > t] = [N_t = 0], \quad S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

- b) De même, le  $n$ -ième appel survient après  $t$  si et seulement si au plus  $n - 1$  appels ont été reçus dans  $[0, t]$  :

$$[S_n > t] = [N_t \leq n - 1].$$

- c) Pour  $t \geq 0$ ,  $F_{S_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(N_t \leq n - 1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ , et  $F_{S_n}(t) = 0$  pour  $t < 0$ .  $F_{S_n}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (elle vaut 0 en 0) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  ; pour  $t > 0$ ,

$$F'_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(somme télescopique).

$$S_n \text{ est à densité, de densité } t \mapsto \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad 0 \quad (t \leq 0).$$

## 5. Accroissements.

On note  $D = N_t - N_u$ , nombre d'appels reçus dans  $]u, t]$ .

- a)  $N_u$  et  $D$  comptent les appels reçus pendant les intervalles disjoints  $[0, u]$  et  $]u, t]$  ; par hypothèse :

$$N_u \text{ et } N_t - N_u \text{ sont indépendantes.}$$

- b)  $[N_t = n]$  est la réunion disjointe des  $[N_u = i] \cap [D = n - i]$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  (car  $N_u$  et  $D$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ). Par indépendance :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(N_u = i) \mathbb{P}(N_t - N_u = n - i).$$

- c) Pour  $n = 0$  :  $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u} \mathbb{P}(D = 0)$ . Pour  $n = 1$  :  $\lambda t e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u} \mathbb{P}(D = 1) + \lambda u e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)}$ , d'où

$$\mathbb{P}(D = 0) = e^{-\lambda(t-u)}, \quad \mathbb{P}(D = 1) = \lambda(t-u) e^{-\lambda(t-u)}.$$

- d) Récurrence forte : supposons la formule vraie pour  $0, \dots, n-1$  ( $n \geq 1$ ). Par b) et la formule du binôme  $\sum_{i=0}^n \frac{(\lambda u)^i (\lambda(t-u))^{n-i}}{i!(n-i)!} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$  :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} &= e^{-\lambda u} \mathbb{P}(D = n) + e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda u)^i (\lambda(t-u))^{n-i}}{i!(n-i)!} \\ &= e^{-\lambda u} \mathbb{P}(D = n) + e^{-\lambda t} \left( \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \frac{(\lambda(t-u))^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Donc  $e^{-\lambda u} \mathbb{P}(D = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda(t-u))^n}{n!}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t - N_u = n) = \frac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}.$$

## 6. Instant du dernier appel.

- a)

$$R_t \text{ est l'instant du dernier appel reçu dans } [0, t] \text{ (0 s'il n'y en a aucun).}$$

- b)** Avec le système complet  $([N_t = n])_{n \in \mathbb{N}}$  : sur  $[N_t = 0]$ ,  $R_t = 0 \leq u$  ; sur  $[N_t = n]$  ( $n \geq 1$ ),  $R_t = S_n$ . Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n > u] \cap [N_t = n]).$$

- c)** D'après 4.b,  $[S_n > u] = [N_u \leq n - 1]$ , et  $[N_u \leq n - 1] \cap [N_t = n]$  est la réunion disjointe des  $[N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i]$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$  :

$$\mathbb{P}(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i]).$$

- d)** Pour  $u \in [0, t[$ , d'après 5.b et l'indépendance, la somme intérieure vaut  $\mathbb{P}(N_t = n) - \mathbb{P}(N_u = n)\mathbb{P}(D = 0)$ . En sommant sur  $n \geq 1$  :

$$\mathbb{P}(R_t > u) = (1 - e^{-\lambda t}) - e^{-\lambda(t-u)}(1 - e^{-\lambda u}) = 1 - e^{-\lambda(t-u)}.$$

Pour  $u = t$ ,  $\mathbb{P}(R_t > t) = 0 = 1 - e^0$ . Ainsi  $F_t(u) = e^{-\lambda(t-u)}$  sur  $[0, t]$  ; comme  $0 \leq R_t \leq t$ ,  $F_t(u) = 0$  pour  $u < 0$  et  $F_t(u) = 1$  pour  $u > t$ .

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ e^{-\lambda(t-u)} & \text{si } 0 \leq u \leq t, \\ 1 & \text{si } u > t. \end{cases}$$

- e)**  $F_t$  n'est pas continue en 0 ( $F_t(0) = e^{-\lambda t} > 0$ , limite à gauche 0) :  $\mathbb{P}(R_t = 0) = e^{-\lambda t} > 0$ , donc  $R_t$  n'est pas à densité. Par ailleurs  $F_t$  est continue sur  $]0, t]$ , donc  $\mathbb{P}(R_t = u) = 0$  pour tout  $u \in ]0, t]$  ; si  $R_t$  était discrète, on aurait  $\mathbb{P}(0 < R_t \leq t) = \sum \mathbb{P}(R_t = u) = 0$ , alors que  $\mathbb{P}(0 < R_t \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} > 0$ .

$R_t$  n'est ni à densité, ni discrète.