

Année : 2018

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

*Épreuve du 8 mai 2018, annulée
(toute la France sauf Clermont).*

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : <i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; séries ; intégrales</i>	1
Exercice 2 : <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire</i>	1
Exercice 3 : <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; séries ; Python</i>	2
Problème : <i>Thèmes abordés : suites ; intégrales ; variables à densité ; convergences de variables ; Python</i>	5

Exercice 1*Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; séries ; intégrales*

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.

- 1) a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 2) a) Montrer que f est continue sur $] - \infty, 1[$.
b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- 3) a) Montrer que f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.
b) Étudier le signe de $\ln(1-x) + x$ lorsque $x \in] - \infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .
c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.
- 4) a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$, et donner la valeur de u_1 .
b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

- d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente.
e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2

Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire

On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

- 1) Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1. À tout n -uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on associe le vecteur

$$w_x = \sum_{k=1}^n x_k u_k.$$

On se propose de montrer qu'il existe des n -uplets dont les coordonnées appartiennent à $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leq \sqrt{n}$, et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geq \sqrt{n}$.

À cet effet, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère l'application X définie par

$$X(\omega) = \left\| \sum_{k=1}^n X_k(\omega) u_k \right\|^2.$$

On admet que X est une variable aléatoire.

- a) Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la valeur de $E(X_i X_j)$.
 - b) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.
 - c) Conclure quant à l'objectif de cette question.
- 2) Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \dots, p_n$ appartenant à $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|v_k\| \leq 1.$$

On pose $z = \sum_{k=1}^n p_k v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n -uplet x , dont les coordonnées appartiennent à $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum_{k=1}^n x_k v_k$, on ait

$$\|z - y_x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, indépendantes, telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$. On considère l'application Y définie par

$$Y(\omega) = \left\| \sum_{k=1}^n (p_k - Y_k(\omega)) v_k \right\|^2$$

et on admet que Y est une variable aléatoire.

- a) Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la valeur de $E((p_i - Y_i)(p_j - Y_j))$.
- b) Justifier que Y possède une espérance et montrer que $E(Y) \leq \frac{n}{4}$.
- c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 3*Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; séries ; Python*

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ, le mobile est situé en O . À l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \dots, n$.

Pour tout entier naturel n , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$). On admet que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur un même espace probabilisé et sont mutuellement indépendantes.

- 1) a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n .
b) En déduire que X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

- 2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire.

- a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables $X_1, \dots, X_n$.

- b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- c) Vérifier par le calcul que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.

- d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

- 3) a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- b) En déduire que, pour tout $j \geq 2$,

$$\ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}.$$

- c) Conclure que $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln j$.

- 4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire.

- a) Déterminer, pour tout $i \geq j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.

- b) Établir que

$$\forall i \leq j-1, \quad P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.$$

- c) Écrire, pour tout entier naturel $j \geq 2$, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.

- d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5) Informatique.

On rappelle que la fonction `randint(a, b)` du module `random` renvoie un entier choisi uniformément dans $\llbracket a, b \rrbracket$.

- a) Écrire des instructions Python calculant et affichant l'abscisse du mobile après son n -ième déplacement, lorsque n est entré au clavier par l'utilisateur.
- b) Compléter le script Python suivant afin qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z .

```
from random import randint

n = 0
a = 0
while a < 2:
    n = n + 1
    if randint(0, n) == 0:
        a = a + 1
        if a == 1:
            y = n

print("y =", ...)
print("z =", ...)
```

Problème

Thèmes abordés : suites ; intégrales ; variables à densité ; convergences de variables ; Python

Partie I — Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

- 1)
 - a) Calculer u_0 et u_1 .
 - b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- 2)
 - a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.$$

- b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

- c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.$$

- d) En déduire la valeur de u_{2n+1} .

- 3)
 - a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
 - b) En déduire, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
 - c) Montrer enfin que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

- 4) Utiliser la question 2c) pour compléter le script Python suivant afin qu'il calcule u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
from math import pi

n = int(input("Entrer la valeur de n : "))
u = pi / 2
for ...:
    ...
print(u)
```

Partie II — Variables aléatoires

On note f la fonction définie, pour tout réel x , par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 5) Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X ayant f pour densité.
- 6) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- 7)
 - a) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
 - b) Montrer que X possède également une variance et la calculer.
- 8) On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X . Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité.

- a) Déterminer la fonction de répartition F_n de I_n .
 - b) La suite (I_n) converge-t-elle en loi ?
 - c) Déterminer une densité de I_n , puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 et que
- $$E(I_n^2) = 2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)^n dx.$$
- d) Établir que $E(I_n^2) \leq \pi u_n$.
 - e) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
 - 9) Soit h la restriction de la fonction cosinus à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - a) Montrer que h réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$.
 - b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y , puis vérifier que Y suit une loi uniforme.
 - c) On rappelle que la fonction `random()` du module `random` renvoie une simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$, et que la fonction cosinus réciproque est disponible sous le nom `acos` dans le module `math`. Compléter le script Python suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X .

```
from math import acos
from random import random
```

```
Y = ...
X = ...
```