

**Année :** 2018

**École :** EDHEC

**Option :** Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

## Sommaire

|                                                                                                              |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Exercice 1 :</b> <i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; séries</i>                       | <b>1</b> |
| <b>Exercice 2 :</b> <i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire</i> | <b>1</b> |
| <b>Exercice 3 :</b> <i>Thèmes abordés : variables à densité ; Python</i>                                     | <b>2</b> |
| <b>Problème :</b> <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; variables à densité</i>                        | <b>4</b> |

## Exercice 1

*Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; séries*

La lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul. Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

- 1) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x$ , admet une unique solution, notée  $u_n$ .
- 2)
  - a) Vérifier que  $u_n$  appartient à  $]0, 1[$ .
  - b) En déduire le signe de  $f_{n+1}(u_n)$ , puis établir que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - c) Conclure que la suite  $(u_n)$  converge et que sa limite appartient à  $[0, 1]$ .
  - d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite  $(u_n)$  vaut 1.
- 3) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $v_n = 1 - u_n$ .
  - a) Justifier que  $v_n$  est strictement positif, puis montrer que

$$\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n v_n.$$

- b) Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$$

et en déduire que  $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$ .

- c) Montrer enfin que

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

- 4) Donner la nature des séries de termes généraux  $v_n$  et  $v_n^2$ .

## Exercice 2

*Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire*

On considère l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La norme d'un vecteur  $x$  est notée  $\|x\|$ .

On considère un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  qui vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

- 1) Établir que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x), x \rangle = 0$ .
- 2) On admet que tout endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant la question 1, que 0 est la seule valeur propre réelle de  $f$ .

**Données**

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha \text{ réel.}$$

- 3) Montrer que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 4) Résoudre le problème posé si  $\dim \ker(f) = 3$ .
- 5) On suppose dans cette question que  $\dim \ker(f) = 2$ .
- a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , où  $e_1$  appartient à  $\text{Im}(f)$  et  $(e_2, e_3)$  est une base orthonormale de  $\ker(f)$ .
- b) Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Vérifier que  $\text{Im}(f)$  est stable par  $f$ , puis montrer que  $b$  et  $c$  sont nuls.
- d) En considérant le réel  $\langle f(e_1), e_1 \rangle$ , donner la valeur de  $a$ . Que dire de l'hypothèse  $\dim \ker(f) = 2$  ?
- 6) On suppose dans cette question que  $\dim \ker(f) = 1$ .
- a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , où  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormale de  $\text{Im}(f)$  et  $e_3$  appartient à  $\ker(f)$ .
- b) Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Montrer que  $a$  et  $d$  sont nuls et que  $c = -b$ .
- d) Conclure.

**Exercice 3**

*Thèmes abordés : variables à densité ; Python*

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$  et on pose  $Y = \sqrt{X}$ .

- 1) On rappelle que, dans la bibliothèque `numpy.random`, la commande

`np.random.exponential(1/lambda)`

simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

Écrire une ou plusieurs instructions Python utilisant cette commande et permettant de simuler  $Y$ .

- 2)   a) Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$ .  
      b) En déduire une densité  $f_Y$  de  $Y$ .
- 3)   a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire  $Z$  suivant la loi normale centrée réduite.  
      b) En déduire que  $Y$  possède une espérance et donner sa valeur.
- 4) On pose  $U = 1 - e^{-X/2}$ .  
      a) Vérifier que  $U(\Omega) = [0, 1[$ .  
      b) Déterminer la fonction de répartition  $F_U$  de  $U$  et reconnaître la loi de  $U$ .  
      c) Exprimer  $X$  en fonction de  $U$ , puis en déduire une simulation Python de  $Y$  utilisant uniquement la fonction `np.random.random()`.

## Problème

*Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; variables à densité*

Dans ce problème, on désigne par  $\lambda$  un réel strictement positif. On admet que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On s'intéresse aux appels parvenant à un central téléphonique et on suppose, d'une part, qu'ils arrivent de façon indépendante au central et, d'autre part, que le nombre d'appels reçus pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel  $t$  positif, on note  $N_t$  la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

- 1) Justifier que  $p_0(0) = 1$  et  $p_n(0) = 0$  pour  $n \geq 1$ . En déduire la loi de  $N_0$ .

### Résultat admis

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t), \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \end{cases}$$

- 2) Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel positif  $t$ , on pose

$$f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t).$$

- a) Montrer que la fonction  $f_0$  est constante, puis utiliser la première question pour déterminer cette constante.
- b) Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f'_n(t)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $f_{n-1}(t)$ .
- c) On suppose que, pour un certain entier naturel  $n$  non nul,

$$\forall t \geq 0, \quad f_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

- i) Montrer qu'il existe une constante  $K$  telle que

$$\forall t \geq 0, \quad f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + K.$$

- ii) En utilisant la valeur de  $p_n(0)$  pour  $n \geq 1$ , donner finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression explicite de  $f_n(t)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $n$  et  $t$ .

- 3) a) Donner  $p_n(t)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et tout réel  $t$  positif.

- b) Conclure que  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

- 4) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $S_n$  la variable aléatoire égale à l'instant où survient le  $n$ -ième appel.

- a) Comparer, pour tout réel  $t$  positif, les événements  $[S_1 > t]$  et  $[N_t = 0]$ , puis reconnaître la loi de  $S_1$ .

- b)** Comparer, pour tout réel  $t$  positif, les événements  $[S_n > t]$  et  $[N_t \leq n - 1]$ .
- c)** Montrer que  $S_n$  est une variable à densité dont une densité est la fonction  $f_n$  définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

- 5)** Soit  $(t, u)$  un couple de réels positifs tels que  $u < t$ .

- a)** Justifier sans calcul que les variables aléatoires  $N_u$  et  $N_t - N_u$  sont indépendantes.
- b)** Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N_t = n) = \sum_{i=0}^n P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i).$$

- c)** En déduire la valeur de  $P(N_t - N_u = 0)$ , puis celle de  $P(N_t - N_u = 1)$ .
- d)** Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N_t - N_u = n) = \frac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}.$$

- 6)** On pose, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$R_t(\omega) = \begin{cases} S_{N_t(\omega)}(\omega), & \text{si } N_t(\omega) \geq 1, \\ 0, & \text{si } N_t(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que  $R_t$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- a)** Décrire ce que représente la variable aléatoire  $R_t$ .
- b)** Utiliser le système complet d'événements  $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour montrer que

$$\forall t > 0, \forall u \in [0, t], \quad P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n > u] \cap [N_t = n]).$$

- c)** Utiliser la question 4.b pour établir la relation

$$\forall t > 0, \forall u \in [0, t], \quad P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i]).$$

- d)** Montrer enfin que la fonction de répartition de  $R_t$  est la fonction  $F_t$  définie par

$$F_t(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u < 0, \\ e^{-\lambda(t-u)}, & \text{si } 0 \leq u \leq t, \\ 1, & \text{si } u > t. \end{cases}$$

- e)** La variable aléatoire  $R_t$  est-elle à densité ? Est-elle discrète ?