Lycée Clémenceau **Mardi 8 mai 2018**
ECS 2 **Durée : 4 heures**

Sujet de l'EDHEC 2018 (Clermont)

Exercice 1. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

(1) Etudier la parité de f.

(2) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

(3) (a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

(b) Montrer que X possède une variance.

(4) On note F la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

(5) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.

(a) Déterminer la loi de Y.

(b) Déterminer explicitement $F(x)$ pour tout réel x.

(c) Etablir que la fonction F^{-1}, bijection réciproque de F, est définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

(d) En déduire un script Scilab permettant de simuler la variable aléatoire X.

Exercice 2. Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition) et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'endomorphisme identité de E. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. De plus, on note I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.

(2) On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

(a) Etablir l'égalité : $ad - bc = 0$.

(b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

(c) En déduire alors que $a + d = 0$.

(3) Conclure que : A nilpotente $\iff A^2 = 0$.

Partie 2 : Dans cette partie, f désigne un endomorphisme $\neq 0$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

(1) (a) Montrer que, si $\ker(f) = \mathfrak{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

(b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(f)$. Etablir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\ker(f) = \mathfrak{Im}(f)$.

(c) En déduire, à l'aide de la partie 1, l'équivalence : f est nilpotent $\iff \ker(f) = \mathfrak{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

(2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

(a) Montrer les inclusions : $\mathfrak{Im}(f) \subset \mathfrak{Im}(u)$ et $\ker(v) \subset \ker(f)$.

(b) En déduire les égalités : $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Im}(u)$ et $\ker(v) = \ker(f)$.

(c) En déduire l'égalité : $\ker(u) = \mathfrak{Im}(v)$.

(d) Conclure.

Exercice 3. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

(1) (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.

(c) A l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

(1) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

(2) (a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

(b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $b = -a$.

(3) (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

(b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

(c) A l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

(d) En déduire que f_n possède un extremum local en a.

(e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.

(4) (a) Etudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.

(b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

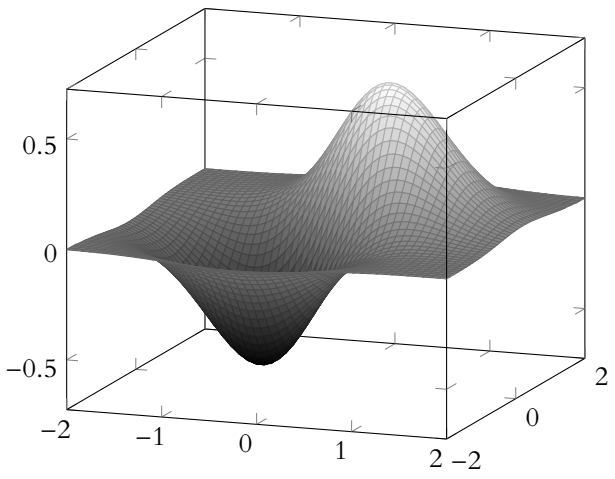
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

(5) Question d'informatique.

(a) Ecrire des commandes `Scilab` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

(b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Problème 1. On effectue des lancers d'une pièce donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant face avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : "la pièce donne pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ lancer", on note également S_k le rang du $k^{\text{ème}}$ pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie 1 : simulations de S_k et T_k.

(1) Compléter les lignes 7 et 10 du script Scilab suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
k = input('donnez une valeur pour k :')
p = input('donnez une valeur pour p :')
n = 0
c = 0
while c<k
    n=n+1
    if - - - then c = c+1
    end
end
disp(- - -)
```

(2) On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par la suivante, dûment complétée :

```
if - - - then c = c+1, else - - -
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

(1) Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

(2) Soit k un entier naturel ≥ 2. Pour tout entier naturel $n \geq k$, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

(a) Donner la loi de X_{n-1}.

(b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

(c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

(3) Soit k un entier ≥ 2. On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier $i \geq 2$, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

(b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

(c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

(4) Estimation. On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.

(a) Pour tout $k \geq 2$, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$. Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

(b) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.

(c) Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Montrer alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

(d) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p (on ne cherchera pas à calculer la valeur de ce biais).

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

(1) Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

(2) Soit $k \geq 2$. On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.

(a) Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les événements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \ldots, P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'événements.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq k$, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.

(c) De la même façon, déterminer, pour tout $i \in [\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.

(d) Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k$.

(3) (a) Déduire des questions précédentes la relation : $E(T_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k$.

(b) Etablir finalement que : $E(T_k) = \dfrac{1-p^k}{qp^k}$.

(4) Justifier que $E(S_k) \leq E(T_k)$, puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.$$