

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Parties I et II – Intégrales de Wallis et développement de $I(x)$

$$W_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k u \, du ; I(x) = \pi \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Corrigé – Problème 1.

1. Premières valeurs.

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = [-\cos u]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. Relation de récurrence.

- a) On intègre par parties $W_{k+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{k+1} u \sin u \, du$ avec $a(u) = \sin^{k+1} u$ et $b(u) = -\cos u$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a'(u) = (k+1) \sin^k u \cos u$, $b'(u) = \sin u$:

$$W_{k+2} = [-\sin^{k+1} u \cos u]_0^{\pi/2} + (k+1) \int_0^{\pi/2} \sin^k u \cos^2 u \, du = (k+1)(W_k - W_{k+2}).$$

$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}.$$

- b) D'après a), $W_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} W_k$. Récurrence : la formule est vraie pour $k = 0$. Si elle l'est au rang k ,

$$W_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{2^{2k}(k!)^2 \cdot 4(k+1)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

3. Changement de variable.

La fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$. Pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{1 - \sin^2 u} = \cos u > 0$. Le changement de variable $t = \sin u$ montre que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$ est de même nature que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\cos u} \cos u \, du = \int_0^{\pi/2} \sin^k u \, du,$$

intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc convergente, et que les deux intégrales sont égales.

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge et vaut } W_k.$$

4. La fonction I .

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$, majorée par $\frac{2e^{|x|}}{\sqrt{1-t^2}}$, dont l'intégrale converge (question 3 avec $k = 0$). Par comparaison, $I(x)$ existe. De plus l'expression est inchangée quand on remplace x par $-x$.

$$I \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}$$

- b)

$$I(0) = 2W_0 = \pi.$$

5. Développement en série.

- a) Soit $g : u \mapsto e^u + e^{-u}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $g^{(2j)}(u) = e^u + e^{-u}$ et $g^{(2j+1)}(u) = e^u - e^{-u}$; donc $g^{(2j)}(0) = 2$ et $g^{(2j+1)}(0) = 0$, et la partie régulière de Taylor à l'ordre $2n$ en 0 est $\sum_{k=0}^n \frac{2u^{2k}}{(2k)!}$. Pour $v \in [0, xt]$, $|g^{(2n+1)}(v)| = e^v - e^{-v} \leq e^v \leq e^x$ (car $0 \leq xt \leq x$). L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et xt donne, puisque $0 \leq xt \leq x$,

$$\left| g(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq e^x \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^n \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

- b) Par linéarité des intégrales convergentes et la question 3 ($\int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_{2k}$), puis a) :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1} e^x}{(2n+1)!} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x^{2n+1} e^x}{(2n+1)!} W_0,$$

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1} \pi}{2(2n+1)!} e^x.$$

- c) D'après 2.b), $\frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} = \pi \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$. Le majorant de b) tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (terme général de la série exponentielle convergente $\sum \frac{x^m}{m!}$). Donc les sommes partielles convergent vers $\frac{1}{\pi} I(x)$:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Problème 1 – Parties III et IV – Équivalent de $I(x)$ et application
 $I(x) \sim \frac{e^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} ; \mathbb{P}(X = Y) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$ pour $X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ indépendantes.

Corrigé – Problème 1.
6. Majoration.

Pour $x \geq 0$ et $t \in [0, 1[$, $0 \leq e^{-xt} \leq 1$, donc par croissance de l'intégrale et la question 3 :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

7. Encadrement de $\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

a) Pour $v \in [0, \frac{1}{2}]$, $0 < 1-v \leq 1$ donc $\frac{1}{1-v} \geq 1$. De plus $(1+v)^2(1-v) = 1+v(1-v-v^2)$ et $1-v-v^2 \geq 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} > 0$, donc $(1+v)^2(1-v) \geq 1$.

$$1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2.$$

b) La fonction $u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0, 1]$ sur $[0, 1[$. Avec $t = 1-u$: $1-t^2 = u(2-u) = 2u(1-\frac{u}{2})$ et $e^{xt} = e^x e^{-xu}$. Les deux intégrales sont de même nature (la première converge, question 4) et

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} du.$$

c) Avec $v = \frac{u}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$, a) donne, par croissance de la racine carrée, $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}} \leq 1 + \frac{u}{2}$.

On multiplie par $\frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \geq 0$ et on intègre ($\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du$ converge par comparaison à $\frac{1}{\sqrt{u}}$, Riemann) :

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du.$$

8. Intégrales gaussiennes.

a) Une densité de $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 et la loi admet un moment d'ordre 2 égal à la variance $\frac{1}{2}$; les fonctions intégrées étant paires :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

b) La fonction $u \mapsto \sqrt{xu}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0, 1]$ sur $]0, \sqrt{x}]$, avec $u = \frac{t^2}{x}$, $du = \frac{2t}{x} dt$. Les intégrales gardent leur nature et

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \frac{\sqrt{x}}{t} \cdot \frac{2t}{x} dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt,$$

$$\int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Les intégrales de droite tendent vers les limites non nulles de a) :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

9. Équivalent de $I(x)$.

Notons $J(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $A(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \sim \frac{e^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$ et $B(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du \sim \frac{e^x \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}x\sqrt{x}}$. Alors $\frac{B(x)}{A(x)} \sim \frac{1}{4x} \rightarrow 0$ et, d'après 7.c), $1 \leq \frac{J(x)}{A(x)} \leq 1 + \frac{B(x)}{A(x)}$: par encadrement, $J(x) \sim A(x)$. Enfin $I(x) = J(x) + \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$, où le second terme est borné (question 6) tandis que $A(x) \rightarrow +\infty$:

$$I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.$$

10. Simulation.

- a) On simule N couples indépendants (X, Y) et on renvoie la fréquence de l'événement $[X = Y]$, qui approche $\mathbb{P}([X = Y])$ d'après la loi faible des grands nombres :

```
def estime(lambd):
    N = 100000
    c = 0
    for i in range(N):
        X = rd.poisson(lambd)
        Y = rd.poisson(lambd)
        if X == Y:
            c = c + 1
    return c / N
```

- b) Le graphe se stabilise autour de 0,5 : on conjecture $\sqrt{\pi\lambda} \mathbb{P}([X = Y]) \rightarrow \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}([X = Y]) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.$$

11. Calcul de $\mathbb{P}([X = Y])$.

$[X = Y]$ est la réunion disjointe des $[X = k] \cap [Y = k]$, $k \in \mathbb{N}$. Par σ -additivité et indépendance :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right)^2,$$

$$\mathbb{P}([X = Y]) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

12. Équivalent.

- a) $\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = \frac{(2\lambda)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$; d'après 5.c) avec $x = 2\lambda$:

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{e^{-2\lambda}}{\pi} I(2\lambda).$$

b) D'après 9, $I(2\lambda) \sim \frac{e^{2\lambda}\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\lambda}}$, donc

$$\mathbb{P}([X = Y]) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}},$$

ce qui confirme la conjecture de la question 10.b).

Problème 2

Problème 2 – Partie I – L'endomorphisme $\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$

Matrice, noyau, diagonalisation dans la base $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

Corrigé – Problème 2.

1. φ est un endomorphisme.

- a) La dérivation est linéaire, ainsi que la multiplication par un polynôme fixé ; par combinaison :

φ est linéaire.

b)

$$\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X^{n+1} = X^n - X^{n+1} + X^{n+1}, \quad \boxed{\varphi(X^n) = X^n.}$$

- c) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\varphi(X^k) = \frac{k}{n}X^k(1-X) + X^{k+1} = \frac{k}{n}X^k + \left(1 - \frac{k}{n}\right)X^{k+1},$$

de degré $\leq k+1 \leq n$ si $k < n$, et $\varphi(X^n) = X^n$. Par linéarité, $\varphi(E) \subset E$.

φ est un endomorphisme de E .

2. Matrice et rang.

D'après 1.c), la colonne d'indice k (numérotée de 0 à n) a pour coefficients $\frac{k}{n}$ en ligne k et $1 - \frac{k}{n}$ en ligne $k+1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 - \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

A est triangulaire inférieure de coefficient diagonal nul en position $(0,0)$: elle n'est pas inversible, donc $\text{rg } A \leq n$. Les colonnes d'indices $0, \dots, n-1$, privées de leur première ligne, forment une matrice carrée de taille n triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $1 - \frac{k}{n} \neq 0$ ($0 \leq k \leq n-1$), donc inversible : ces n colonnes sont libres et $\text{rg } A \geq n$.

$\text{rg } A = n$.

3. Noyau.

- a) $\text{rg } \varphi = n < n+1 = \dim E$: par le théorème du rang, $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$.

φ n'est pas injectif.

b) D'après le résultat admis, $\text{Ker } \varphi \subset \text{Vect}((1 - X)^n)$. Réciproquement,

$$\varphi((1 - X)^n) = \frac{1}{n}X(1 - X)(-n(1 - X)^{n-1}) + X(1 - X)^n = 0.$$

Le polynôme $(1 - X)^n$ est non nul, donc forme une famille libre :

$$\boxed{((1 - X)^n) \text{ est une base de } \text{Ker } \varphi.}$$

4. Diagonalisabilité.

A est triangulaire : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $\frac{k}{n}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, qui sont $n + 1$ réels distincts. Un endomorphisme d'un espace de dimension $n + 1$ admettant $n + 1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable.

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable, de spectre } \left\{ \frac{k}{n}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.}$$

5. Base de vecteurs propres.

a) $P'_k = kX^{k-1}(1 - X)^{n-k} - (n - k)X^k(1 - X)^{n-k-1}$ (les termes correspondant à $k = 0$ ou $k = n$ étant nuls), donc

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \frac{k}{n}X^k(1 - X)^{n-k+1} - \frac{n - k}{n}X^{k+1}(1 - X)^{n-k} + X^{k+1}(1 - X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}X^k(1 - X)^{n-k}((1 - X) + X). \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(P_k) = \frac{k}{n}P_k.}$$

b) Les P_k sont non nuls, vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\frac{k}{n}$: la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ; elle compte $n + 1 = \dim E$ éléments de E .

$$\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base de } E, \quad \text{Mat}(\varphi) = \text{diag}\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right).}$$

c) Chaque sous-espace propre est de dimension 1 ($n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$) :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad E_{k/n}(\varphi) = \text{Vect}(P_k).}$$

Problème 2 – Partie II – Nombre de numéros distincts

Y_k : nombre de numéros distincts en k tirages ; $\mathbb{E}(Y_k) = n(1 - (1 - \frac{1}{n})^k)$ et loi de Y_k .

Corrigé – Problème 2.**6. Les variables Z_k .**

- a) $Z_2 = 1$ si et seulement si le second numéro diffère du premier, ce qui arrive avec probabilité $\frac{n-1}{n}$ (le second tirage est uniforme et indépendant du premier).

$$Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

- b) Sachant $[Y_k = j]$ (lorsque cet événement est de probabilité non nulle), j numéros ont déjà été tirés et le $(k+1)$ -ième tirage, uniforme et indépendant des précédents, donne un nouveau numéro avec probabilité $\frac{n-j}{n}$:

$$\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{j}{n}.$$

Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([Y_k = j])_{1 \leq j \leq k}$ (on ne retient que les événements de probabilité non nulle) :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbb{P}(Y_k = j) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k j \mathbb{P}(Y_k = j),$$

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k).$$

- c) Par linéarité, $\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(Z_j) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1])$ (Z_j suit une loi de Bernoulli) :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1]).$$

- d) Notons $a_k = \mathbb{P}([Z_k = 1])$; $a_1 = 1$ et $a_2 = 1 - \frac{1}{n}$. Pour $k \geq 2$, en écrivant c) aux rangs k et $k-1$ et en soustrayant : $a_{k+1} - a_k = -\frac{1}{n}a_k$. Ainsi $a_{k+1} = (1 - \frac{1}{n})a_k$ pour tout $k \geq 1$ (aussi pour $k = 1$), et (a_k) est géométrique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

- e) Pour $k \geq 1$, $\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{j=1}^k (1 - \frac{1}{n})^{j-1} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^k}{1/n}$, formule encore vraie pour $k = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(Y_k) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

7. Les polynômes G_k .

- a) $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$, et Y_2 vaut 1 avec probabilité $\frac{1}{n}$ et 2 avec probabilité $1 - \frac{1}{n}$:

$$G_0 = 1, \quad G_1 = X, \quad G_2 = \frac{1}{n}X + \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2.$$

- b) $Y_{k+1} = Y_k + Z_{k+1}$, donc $[Y_{k+1} = i]$ est la réunion disjointe de $[Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]$ et $[Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]$. Comme en 6.b), $\mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]) = \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i)$ et $\mathbb{P}([Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]) = (1 - \frac{i-1}{n}) \mathbb{P}(Y_k = i - 1)$ (ces égalités restant vraies si l'événement conditionnant est de probabilité nulle) :

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i - 1]).$$

- c) Notons $q_i = \mathbb{P}(Y_k = i)$ (avec $q_{-1} = 0$). Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} X(1 - X)G'_k + XG_k &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} q_i X^i + \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) q_i X^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n} q_i + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) q_{i-1}\right) X^i, \end{aligned}$$

le terme d'indice $i = n + 1$ de la seconde somme étant nul (coefficient $1 - \frac{n}{n} = 0$).
D'après b) :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1 - X)G'_k + XG_k = \varphi(G_k).$$

- d) Par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad G_k = \varphi^k(G_0).$$

8. Espérance via G_k .

- a)

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y_k = i) = 1, \quad G'_k(1) = \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{E}(Y_k).$$

- b) En dérivant 7.c) : $G'_{k+1} = \frac{1}{n}((1 - 2X)G'_k + X(1 - X)G''_k) + G_k + XG'_k$. En $X = 1$:

$$G'_{k+1}(1) = -\frac{1}{n}G'_k(1) + G_k(1) + G'_k(1), \quad \mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(Y_k) + 1.$$

- c) La suite est arithmético-géométrique de point fixe n : $\mathbb{E}(Y_k) - n = (1 - \frac{1}{n})^k (\mathbb{E}(Y_0) - n)$ avec $\mathbb{E}(Y_0) = 0$.

$$\mathbb{E}(Y_k) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

9. Loi de Y_k .

- a) Par la formule du binôme :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = (X + (1 - X))^n = 1.$$

- b) $(1 - X)^{n-j} = \sum_{m=0}^{n-j} \binom{n-j}{m} (-1)^m X^m$; en multipliant par X^j et en posant $i = j + m$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

- c) $G_0 = 1 = \sum_j \binom{n}{j} P_j$ et $\varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$ (5.a), donc par linéarité et b), en permutant les sommes finies :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i,$$

$$\boxed{\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.}$$

- d) D'après 7.d), $G_k = \varphi^k(G_0)$; on identifie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Enfin $\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$:

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k}$$

(avec la convention $0^0 = 1$ pour $k = 0$).