

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Corrigé détaillé – 2018

Ce corrigé suit l'adaptation du sujet au programme de Mathématiques approfondies. Les arguments de convergence et de régularité sont établis directement à partir des résultats demandés dans l'énoncé.

Table des matières

1	Premières propriétés et premiers exemples	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; séries.</i>	2
2	Régularité de la fonction f_a	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries.</i>	4
3	Une formule de réciprocité	7
	<i>Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.</i>	7
4	Applications aux variables aléatoires discrètes	10
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels.</i>	10

Notations. Pour $r > 0$,

$$A(r) = \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq k} |a_n| r^n \text{ converge} \right\},$$

et

$$B(r) = \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n r^n) \text{ converge vers } 0 \right\}.$$

Lorsque cela a un sens, on pose

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1 Premières propriétés et premiers exemples

Thèmes abordés : suites ; séries.

1. Soient $x \in [-r, r]$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq k$,

$$0 \leq |a_n| |x|^n \leq |a_n| r^n.$$

Comme $a \in A(r)$, la série $\sum_{n \geq k} |a_n| r^n$ converge. Par comparaison, $\sum_{n \geq k} |a_n| |x|^n$ converge. Si $r \leq r'$ et $a \in A(r')$, on applique le résultat précédent avec r' et $x = r$. Pour tout k , la série $\sum_{n \geq k} |a_n| r^n$ converge, donc

$$\boxed{A(r') \subset A(r).}$$

2. Supposons $0 < r \leq r'$ et $a \in B(r')$. Alors

$$a_n r^n = (a_n (r')^n) \left(\frac{r}{r'} \right)^n.$$

Le premier facteur tend vers 0 et le second est borné par 1, donc $a_n r^n \rightarrow 0$. Ainsi

$$\boxed{B(r') \subset B(r).}$$

Si $a \in A(r)$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ converge. Son terme général tend donc vers 0, c'est-à-dire $|a_n| r^n \rightarrow 0$, puis $a_n r^n \rightarrow 0$. Ainsi

$$\boxed{A(r) \subset B(r).}$$

3. La suite nulle appartient à $A(r)$. Soient $a, c \in A(r)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq k$,

$$|\lambda a_n + \mu c_n| r^n \leq |\lambda| |a_n| r^n + |\mu| |c_n| r^n.$$

Les deux séries du membre de droite convergent. Par comparaison, $\sum_{n \geq k} |\lambda a_n + \mu c_n| r^n$ converge. Donc

$$\boxed{A(r) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

4. a) Fixons $k \in \mathbb{N}$ et posons

$$u_n^{(k)} = \frac{n^{k+2} r^n}{n!} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}^{(k)}}{u_n^{(k)}} = r \frac{(n+1)^{k+2}}{(n+1)n^{k+2}} = r \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{k+1} \rightarrow 0.$$

Il existe donc N tel que, pour $n \geq N$, $u_{n+1}^{(k)} \leq \frac{1}{2}u_n^{(k)}$. Par récurrence,

$$0 \leq u_{N+j}^{(k)} \leq \frac{u_N^{(k)}}{2^j},$$

d'où

$$\boxed{u_n^{(k)} \longrightarrow 0.}$$

En particulier, la suite $(u_n^{(k)})$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $u_n^{(k)} \leq M$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{u_n^{(k)}}{n^{k+2}} \leq \frac{M}{n^{k+2}}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} n^{-(k+2)}$ converge, donc $\sum_{n \geq k} r^n/n!$ converge. Ainsi, pour tout $r > 0$,

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in A(r).}$$

b) Pour $\beta(\lambda) = (\lambda^n)$,

$$\lambda^n r^n = (\lambda r)^n.$$

Cette suite tend vers 0 exactement lorsque $\lambda r < 1$. Ainsi

$$\boxed{\beta(\lambda) \in B(r) \iff 0 < r < \frac{1}{\lambda}.}$$

Par ailleurs, pour tout k ,

$$\sum_{n \geq k} |\lambda^n| r^n = \sum_{n \geq k} (\lambda r)^n,$$

qui est une série géométrique convergente exactement lorsque $\lambda r < 1$. Donc

$$\boxed{\beta(\lambda) \in A(r) \iff 0 < r < \frac{1}{\lambda}.}$$

5. Soient $0 < r < \rho$ et $a \in B(\rho)$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. La suite $(|a_n|\rho^n)$ tend vers 0, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $|a_n|\rho^n \leq M$. Posons $q = r/\rho \in]0, 1[$. Alors

$$n^k |a_n| r^n \leq M n^k q^n.$$

Comme

$$\frac{(n+1)^k q^{n+1}}{n^k q^n} = q \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \longrightarrow q < 1,$$

le même argument géométrique que dans la question précédente donne $n^k q^n \rightarrow 0$. En particulier, pour $k = 2$, la suite $(n^2 q^n)$ est bornée : $n^2 q^n \leq C$. Ainsi

$$|a_n| r^n \leq \frac{MC}{n^2} \quad (n \geq 1).$$

La série $\sum 1/n^2$ converge, donc $\sum |a_n| r^n$ converge, et il en est de même de toute série obtenue en supprimant un nombre fini de termes. Par conséquent

$$\boxed{a \in A(r) \quad \text{pour tout } r \in]0, \rho[.}$$

2 Régularité de la fonction f_a

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries.

Dans cette partie, $R > 0$ et $a \in B(R)$.

6. Soit $x \in]-R, R[$. Choisissons r tel que $|x| < r < R$. Par la question 2, $a \in B(r)$, puis par la question 5, en choisissant un réel entre r et R , on obtient $a \in A(r)$. La série $\sum |a_n| r^n$ converge et $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. Ainsi $\sum a_n x^n$ converge. Donc

$$\boxed{f_a \text{ est définie sur }]-R, R[.}$$

7. a) Pour $n = 0$, l'inégalité est immédiate. Pour $n \geq 1$,

$$(x+h)^n - x^n = h \sum_{j=0}^{n-1} (x+h)^{n-1-j} x^j.$$

Comme x et $x+h$ appartiennent à $[-r, r]$,

$$|(x+h)^n - x^n| \leq |h| \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-1} = nr^{n-1}|h|.$$

Ainsi

$$\boxed{|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|.}$$

- b) Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n ((x+h)^n - x^n) \right| \leq \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^N n |a_n| r^n.$$

D'après la question 5, $a \in A(r)$; en outre la série $\sum n |a_n| r^n$ converge : on peut par exemple choisir $\rho \in]r, R[$, écrire

$$n |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n \left(\frac{r}{\rho} \right)^n,$$

et majorer ensuite le terme par une série de Riemann convergente comme à la question 5. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|.$$

- c) La constante entre parenthèses ne dépend ni de x ni de h . Pour tout $x \in [-r, r]$, lorsque $h \rightarrow 0$ avec $x+h \in [-r, r]$, le membre de droite tend vers 0. Ainsi f_a est continue sur $[-r, r]$. Tout point de $] -R, R[$ appartient à un tel segment avec $r < R$, donc

$$\boxed{f_a \text{ est continue sur }]-R, R[.}$$

8. a) Soit $\rho \in [r, R[$. Choisissons $\sigma \in]\rho, R[$. Puisque $a \in B(R) \subset B(\sigma)$, la suite $(a_n \sigma^n)$ tend vers 0. Or

$$n a_n \rho^n = (a_n \sigma^n) n \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^n.$$

Le second facteur tend vers 0 par le raisonnement de la question 5 ; le premier est borné. Donc $na_n\rho^n \rightarrow 0$, soit $(na_n) \in B(\rho)$. En appliquant les questions 6 et 7 à la suite (na_n) , la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

est définie et continue sur $] -\rho, \rho[$. Comme on peut choisir ρ entre $|x|$ et R pour chaque $x \in] -R, R[$,

$$\boxed{g_a \text{ est définie et continue sur }] -R, R[.}$$

- b) S_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment d'extrémités 0 et x . Le théorème fondamental de l'analyse donne

$$S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S'_n(t) dt.$$

Comme $S_n(0) = a_0$,

$$\boxed{S_n(x) = a_0 + \int_0^x S'_n(t) dt.}$$

- c) Pour $|t| \leq r$,

$$g_a(t) - S'_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k t^{k-1}.$$

Si $x \geq 0$,

$$\left| \int_0^x (g_a - S'_n)(t) dt \right| \leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^{k-1} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^k.$$

Si $x < 0$, on écrit l'intégrale avec les bornes inversées et on obtient la même majoration. Ainsi

$$\boxed{\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^k.}$$

- d) La série $\sum k|a_k| r^k$ converge, donc son reste tend vers 0. D'après b) et c),

$$\left| S_n(x) - a_0 - \int_0^x g_a(t) dt \right| \rightarrow 0.$$

Or $S_n(x) \rightarrow f_a(x)$. Par unicité de la limite,

$$\boxed{f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt.}$$

- e) La fonction g_a est continue sur $] -R, R[$. La fonction $x \mapsto \int_0^x g_a(t) dt$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est g_a . Par d),

$$\boxed{f_a \in \mathcal{C}^1(] -R, R[) \quad \text{et} \quad f'_a = g_a.}$$

9. a) Pour $n \geq k$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Si $a \in A(r)$, choisissons $\rho \in]r, R[$; comme $a \in B(R)$, la question 5 donne $a \in A(\rho)$. Avec $q = r/\rho < 1$,

$$\binom{n}{k} |a_n| r^{n-k} \leq \frac{1}{k! r^k} |a_n| \rho^n n^k q^n.$$

La suite $n^k q^n$ est bornée; la convergence peut alors être obtenue en la majorant, pour n assez grand, par C/n^2 , comme à la question 5. On obtient la convergence de la série demandée.

Réciproquement, si la propriété est vraie pour tout k , on prend $k = 0$:

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{0} |a_n| r^n = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

converge, et donc toutes ses séries privées d'un nombre fini de termes convergent. Ainsi

$$a \in A(r) \iff \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k} \text{ converge.}$$

- b) La question 8 donne une première dérivation. Appliquons-la successivement aux suites de coefficients obtenues. Pour $k \in \mathbb{N}$, la question a) assure la convergence absolue nécessaire sur tout segment $[-r, r] \subset]-R, R[$. Une récurrence sur k donne alors

$$f_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Comme

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = k! \binom{n}{k},$$

on obtient

$$f_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Cette formule étant valable pour tout k , on a

$$f_a \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[).$$

- c) En prenant $x = 0$ et $k = n$ dans la formule précédente, tous les termes d'indice strictement supérieur à n contiennent une puissance strictement positive de 0, tandis que le terme d'indice n vaut $n! a_n$. Donc

$$a_n = \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}.$$

10. a) D'après la question 4, $\alpha \in A(r)$ pour tout $r > 0$, donc f_α est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle vérifie

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

d'où

$$f_\alpha(x) = e^x.$$

Toutes ses dérivées sont égales à elle-même, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_\alpha^{(k)}(1) = e.$$

b) Pour $|\lambda x| < 1$, la série géométrique donne

$$f_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda x)^n = \frac{1}{1 - \lambda x}.$$

D'une part, la question 9 donne

$$f_\beta^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \lambda^n x^{n-k} = k! \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}.$$

D'autre part, par dérivations successives,

$$f_\beta^{(k)}(x) = \frac{k! \lambda^k}{(1 - \lambda x)^{k+1}}.$$

Comme $\lambda > 0$, on simplifie par $k! \lambda^k$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1 - \lambda x)^{k+1}}.$$

3 Une formule de réciprocité

Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.

On suppose $R > 1$, $a \in B(R)$, $a_n \geq 0$, et

$$b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}.$$

L'hypothèse (H) affirme qu'il existe $\rho > 1$ tel que $b_n \rho^n \rightarrow 0$.

11. a) Nous montrons la formule par récurrence sur N . Pour $N = 0$,

$$f_a(0) = f_a(1) - \int_0^1 f_a'(t) dt = b_0 - \int_0^1 f_a'(t) dt.$$

La formule est donc vraie.

Supposons-la vraie au rang N . Dans le reste, réalisons une intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ avec

$$u(t) = \frac{t^N}{N!}, \quad v'(t) = f_a^{(N+1)}(t).$$

Les fonctions u et $v = f_a^{(N)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et

$$u'(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \quad (N \geq 1), \quad v'(t) = f_a^{(N+1)}(t).$$

Pour faire apparaître le rang suivant, il est plus commode d'écrire, sur $[0, 1]$, avec

$$u(t) = \frac{t^{N+1}}{(N+1)!}, \quad v'(t) = f_a^{(N+2)}(t),$$

que

$$\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = b_{N+1} - \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{(N+1)!} f_a^{(N+2)}(t) dt.$$

On obtient donc, par récurrence,

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt.$$

- b) Comme $a_n \geq 0$, la formule de la question 9 montre que $f_a^{(N+1)}(t) \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$ et que cette fonction est croissante sur $[0, 1]$. Ainsi

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt \leq \frac{f_a^{(N+1)}(1)}{N!} \int_0^1 t^N dt.$$

Or $\int_0^1 t^N dt = 1/(N+1)$, donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt \leq \frac{f_a^{(N+1)}(1)}{(N+1)!} = b_{N+1}.$$

L'hypothèse (H) donne $b_{N+1}\rho^{N+1} \rightarrow 0$, donc en particulier $b_{N+1} \rightarrow 0$. Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = 0.$$

- c) Dans la formule de a), le reste tend vers 0. Les sommes partielles $\sum_{p=0}^N (-1)^p b_p$ convergent donc vers $f_a(0) = a_0$. Ainsi

$$a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p.$$

12. Fixons $s \in \mathbb{N}$.

- a) On applique exactement le procédé de la question 11 à la fonction $f_a^{(s)}$. Les intégrations par parties sont réalisées sur $[0, 1]$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment. On obtient

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{p!} f_a^{(p+s)}(1) + \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt.$$

- b) Pour $t \in [0, 1]$, la positivité des coefficients donne

$$0 \leq f_a^{(N+s+1)}(t) \leq f_a^{(N+s+1)}(1).$$

Donc

$$\left| \frac{1}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+1)!}.$$

En multipliant et divisant par $(N+s+1)!\rho^{N+s+1}$,

$$\left| \frac{1}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

- c) Le premier facteur du membre de droite est $b_{N+s+1}\rho^{N+s+1}$, qui tend vers 0 par (H). De plus,

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} = (N+2)(N+3) \cdots (N+s+1)$$

est un produit de s facteurs, donc est majoré, pour N assez grand, par $(2N)^s$. Par croissances comparées,

$$\frac{N^s}{\rho^N} \longrightarrow 0 \quad (\rho > 1).$$

Le second facteur tend donc vers 0. Par encadrement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt = 0.$$

d) Dans a),

$$\frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} = \frac{(p+s)!}{p!} b_{p+s} = s! \binom{p+s}{s} b_{p+s}.$$

Comme $f_a^{(s)}(0) = s!a_s$, le passage à la limite donne

$$s!a_s = s! \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}.$$

Après simplification et changement d'indice $n = p + s$,

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

13. a) Comme $a_n = 0$ pour $n \geq d+1$,

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n.$$

Donc

$$f_a \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } d.$$

b) Pour $n \geq d+1$, $f_a^{(n)} = 0$, donc $b_n = 0$. Pour n'importe quel $\rho > 1$, la suite $(b_n \rho^n)$ est nulle à partir d'un certain rang. Ainsi

$$(H) \text{ est réalisée.}$$

c) La formule de la question 12 donne, pour $s \in [[0, d]]$,

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

Comme $b_n = 0$ pour $n > d$,

$$a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

4 Applications aux variables aléatoires discrètes

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels.

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \mathbb{P}(X = n), \quad G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f_a(x).$$

14. a) On a $0 \leq a_n \leq 1$ et, puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ converge, son terme général tend vers 0. Ainsi $a_n 1^n \rightarrow 0$, donc

$$a \in B(1).$$

- b) Les questions 6 et 9, appliquées avec $R = 1$, montrent que G_X est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$. On peut donc prendre $R = 1$, qui est bien supérieur ou égal à 1 :

$$\boxed{\exists R \geq 1, \quad G_X \in \mathcal{C}^\infty(] -R, R[).$$

15. a) Dire que X suit la loi de Poisson de paramètre 1 signifie ici

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-1} \frac{1}{n!}.$$

Ainsi

$$G_X(x) = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^{x-1}.$$

Donc G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $G_X^{(s)}(x) = e^{x-1}$ pour tout s . Par conséquent

$$\boxed{G_X(x) = e^{x-1} \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbb{N}, \quad G_X^{(s)}(1) = 1.}$$

- b) Ici

$$b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \frac{1}{s!}.$$

Pour tout $\rho > 1$, la question 4 montre que $\rho^s/s! \rightarrow 0$; donc (H) est réalisée. La formule de réciprocity donne

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \frac{1}{k!}.$$

En posant $j = k - n$,

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{e^{-1}}{n!}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-1}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}),}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson de paramètre 1.}}$$

16. On fixe $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

a) Dire que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p signifie

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X + 1 = k) = pq^{k-1}.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \mathbb{P}(X = n) = pq^n.$$

Pour $|x| < 1/q$,

$$G_X(x) = p \sum_{n=0}^{+\infty} (qx)^n = \frac{p}{1 - qx}.$$

Cette expression montre que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1/q, 1/q[$. Par dérivations successives,

$$G_X^{(s)}(x) = \frac{p s! q^s}{(1 - qx)^{s+1}}.$$

Comme $1 - q = p$,

$$\boxed{G_X^{(s)}(1) = \frac{s!}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^s}.$$

b) Si $p > 1/2$, alors $q = 1 - p < p$, donc

$$\boxed{\frac{q}{p} < 1}.$$

On a

$$b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^s.$$

Choisissons ρ tel que

$$1 < \rho < \frac{p}{q},$$

ce qui est possible puisque $q/p < 1$. Alors

$$b_s \rho^s = \frac{1}{p} \left(\frac{q\rho}{p}\right)^s \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse (H) est donc réalisée. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Posons $j = k - n$. La formule de la question 10 b), utilisée avec $\lambda x = -q/p$, donne

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{n+j}{n} \left(\frac{q}{p}\right)^j = \frac{1}{(1 + q/p)^{n+1}} = p^{n+1},$$

car $p + q = 1$. Ainsi

$$a_n = \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^n p^{n+1} = pq^n.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = pq^n}$$

et, par définition,

$$\boxed{X + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p.}$$

17. On suppose $X(\Omega) \subset [[0, d]]$.

a) Pour $s \geq 1$,

$$H_s(x) = \frac{1}{s!} x(x-1) \cdots (x-s+1)$$

est de degré s et son coefficient dominant vaut $1/s! \neq 0$; H_0 est de degré 0. Si

$$\sum_{s=0}^d \lambda_s H_s = 0$$

et si m est le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$, le membre de gauche est de degré m , contradiction. La famille est donc libre. Elle contient $d+1$ éléments dans l'espace Pol_d , de dimension $d+1$. Ainsi

$$(H_0, \dots, H_d) \text{ est une base de } \text{Pol}_d.$$

b) Pour $P \in \text{Pol}_d$, les fonctions $x \mapsto P(x+1)$ et $x \mapsto P(x)$ sont polynomiales de degré au plus d , donc $\Delta(P) \in \text{Pol}_d$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x).$$

Donc

$$\Delta \text{ est un endomorphisme de } \text{Pol}_d.$$

c) On a immédiatement $\Delta(H_0) = 0$. Pour $s \geq 1$,

$$H_s(x+1) - H_s(x) = \frac{x(x-1) \cdots (x-s+2)}{s!} ((x+1) - (x-s+1)).$$

Le facteur entre parenthèses vaut s , donc

$$\Delta(H_s)(x) = \frac{x(x-1) \cdots (x-s+2)}{(s-1)!} = H_{s-1}(x).$$

Enfin $H_s(0) = 0$ pour $s \geq 1$. Ainsi

$$\Delta(H_0) = 0, \quad \Delta(H_s) = H_{s-1} \ (s \geq 1), \quad H_s(0) = 0 \ (s \geq 1).$$

d) Écrivons, dans la base précédente,

$$P = \sum_{j=0}^d c_j H_j.$$

D'après c),

$$\Delta^s(P) = \sum_{j=s}^d c_j H_{j-s}.$$

En évaluant en 0, tous les termes avec $j-s \geq 1$ s'annulent et $H_0(0) = 1$. Donc

$$(\Delta^s P)(0) = c_s.$$

Par conséquent

$$P(x) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s P)(0)] H_s(x).$$

e) On applique d) à $P = e_k$, où $e_k(x) = x^k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^k = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] H_s(n).$$

f) Comme X ne prend que les valeurs $0, \dots, d$,

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{n=0}^d n^k a_n.$$

En utilisant e),

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] \sum_{n=0}^d H_s(n) a_n.$$

Or

$$H_s(n) = \begin{cases} \binom{n}{s}, & n \geq s, \\ 0, & n < s, \end{cases}$$

donc

$$\sum_{n=0}^d H_s(n) a_n = \sum_{n=s}^d \binom{n}{s} a_n.$$

La question 9, évaluée en 1, donne

$$f_a^{(s)}(1) = s! \sum_{n=s}^d \binom{n}{s} a_n,$$

donc la dernière somme vaut b_s . Finalement

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] b_s.$$

g) Pour $k = 0$, $\mathbb{E}(1) = 1$ et la formule précédente donne

$$b_0 = 1.$$

Pour $e_1(x) = x$,

$$\Delta(e_1)(x) = 1, \quad \Delta^2(e_1) = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = b_1 = 1, \quad b_1 = 1.$$

Pour $e_2(x) = x^2$,

$$\Delta(e_2)(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1,$$

puis

$$\Delta^2(e_2)(x) = 2.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X^2) = b_1 + 2b_2.$$

Comme $\mathbb{E}(X^2) = 3/2$ et $b_1 = 1$,

$$\frac{3}{2} = 1 + 2b_2, \quad b_2 = \frac{1}{4}.$$

La formule de réciprocity finie de la question 13 donne

$$a_2 = b_2 = \frac{1}{4},$$

$$a_1 = b_1 - 2b_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et

$$a_0 = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Ce sont les probabilités de la loi binomiale de paramètres 2 et $1/2$:

$$X \text{ suit la loi binomiale de paramètres 2 et } \frac{1}{2}.$$