

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2018

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Premières propriétés et premiers exemples	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; séries.</i>	2
2	Régularité de la fonction f_a	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries.</i>	2
3	Une formule de réciprocité	4
	<i>Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.</i>	4
4	Applications aux variables aléatoires discrètes	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels.</i>	5

Notations et objectifs. Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note

$$A(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq k} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

et

$$B(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}.$$

À toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1 Premières propriétés et premiers exemples

Thèmes abordés : suites ; séries.

1. Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$. Montrer que, pour tout réel $x \in [-r, r]$ et tout entier naturel k , la série $\sum_{n \geq k} |a_n| |x|^n$ converge. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a $A(r') \subset A(r)$.
2. Vérifier également que

$$0 < r \leq r' \implies B(r') \subset B(r) \quad \text{et} \quad A(r) \subset B(r).$$

3. Montrer que, pour tout réel strictement positif r , $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
4. Exemples.

- a) On souhaite montrer que, pour tout réel strictement positif r , la suite $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose, pour tout entier naturel k ,

$$u_n^{(k)} = \frac{n^{k+2} r^n}{n!}.$$

En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}^{(k)}}{u_n^{(k)}}$, montrer que la suite $(u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure alors que $\alpha \in A(r)$.

- b) Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Déterminer ensuite les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.
5. Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout réel $r \in]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $A(r)$. On pourra penser à écrire

$$n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

2 Régularité de la fonction f_a

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries.

Dans cette partie, R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

6. Vérifier que $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $] -R, R[$. On pourra utiliser la question 5.
7. Continuité de f_a .

- a) Soit $r \in]0, R[$, $x \in [-r, r]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|.$$

- b) Justifier soigneusement que

$$|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n \right) |h|.$$

- c) Montrer alors que f_a est continue sur $[-r, r]$, puis sur $] -R, R[$.

8. Caractère $\mathcal{C}^1$ de f_a . On considère ici un réel $r \in]0, R[$ et $x \in [-r, r]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

et, sous réserve d'existence,

$$g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- a) Soit $\rho \in [r, R[$. Justifier que la suite $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, et en déduire que g_a est définie et continue sur $] -R, R[$.
- b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(x) = a_0 + \int_0^x S'_n(t) dt.$$

- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

- d) En déduire que

$$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt.$$

- e) Montrer alors que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et que $f'_a = g_a$.

9. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f_a .

- a) Soit $r \in]0, R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$$

converge.

- b) Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et que, pour tout $x \in] -R, R[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

10. Exemples.

- a) On pose $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donner l'expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.
- b) Soit λ un réel strictement positif, β la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout $x \in]-1/\lambda, 1/\lambda[$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1/\lambda, 1/\lambda[$, la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$$

converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1 - \lambda x)^{k+1}}.$$

3 Une formule de réciprocité

Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable.

Dans cette partie, R désigne un réel strictement supérieur à 1 et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!},$$

et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que la suite $(b_n \rho^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

11. Expression de a_0 .

- a) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt.$$

- b) Démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = 0.$$

- c) En déduire que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p$ converge et que

$$a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p.$$

12. Généralisation. On considère ici un entier naturel s fixé.

- a) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{p!} f_a^{(p+s)}(1) + \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt.$$

- b) Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

c) Déterminer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N!} \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) dt.$$

d) Montrer alors que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et que

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

13. Cas particulier. On suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq d+1 \implies a_n = 0.$$

a) Que peut-on dire de la fonction f_a ?

b) Montrer que la condition (H) est réalisée.

c) En déduire que, pour tout $s \in [[0, d]]$,

$$a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

4 Applications aux variables aléatoires discrètes

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; espaces vectoriels.

Dans cette partie, les variables aléatoires sont discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X , on pourra utiliser les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \mathbb{P}(X = n), \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

autrement dit $G_X = f_a$.

14. Premiers résultats.

a) Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

b) En déduire qu'il existe un réel R au moins égal à 1 tel que G_X soit définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

15. Premier exemple.

a) On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer la fonction G_X , vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $s \in \mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b) On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant : $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $f_a^{(s)}(1) = 1$. Justifier que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de X ?

16. Deuxième exemple. On considère ici un réel $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

a) On suppose que $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p . Déterminer la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la fonction G_X ; vérifier que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1/q, 1/q[$. Enfin, pour tout $s \in \mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

- b) On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$. Vérifier que $\frac{q}{p} < 1$. On considère X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que $G_X = f_a$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1/q, 1/q[$, et que, pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$f_a^{(s)}(1) = \frac{s!}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^s.$$

Justifier que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $X + 1$?

17. Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[[0, d]]$, où d est un entier de $\mathbb{N}^*$. On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d . Pour tout $s \in [[0, d]]$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s \in [[0, d]]}$ est une base de Pol_d .

On définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \mapsto 1,$$

$$\text{et, pour tout } s \in [[1, d]], \quad H_s : x \mapsto \frac{x(x-1) \cdots (x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (x-k).$$

On note Δ l'application définie sur Pol_d par

$$\forall P \in \text{Pol}_d, \quad \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x).$$

- Montrer que la famille $(H_s)_{s \in [[0, d]]}$ est une base de Pol_d .
- Montrer que Δ est un endomorphisme de Pol_d .
- Montrer que $\Delta(H_0) = 0$ et encore que, pour tout $s \in [[1, d]]$, $\Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.
- Montrer que, pour tout $P \in \text{Pol}_d$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(P))(0)] H_s(x).$$

- En déduire que, pour tout $k \in [[0, d]]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^k = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] H_s(n).$$

- Montrer alors que, pour tout $k \in [[0, d]]$, l'espérance de X^k est

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] b_s, \quad \text{où} \quad b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

- Exemple : on suppose ici que $d = 2$, $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{2}$. Déterminer b_0 , b_1 et b_2 , puis a_0 , a_1 et a_2 . Reconnaître la loi de X .