

HEC Paris

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Préliminaire

Préliminaire – Intégrales A_k

$A_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ et convergence des intégrales définissant F et G .

Corrigé – Préliminaire.

1. Les intégrales A_k .

- a) La fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et $t^2 \cdot t^k e^{-t^2} = t^{k+2} e^{-t^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (croissances comparées). Ainsi $t^k e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann). Par comparaison de fonctions positives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- b) *Calcul de A_0 .* La densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ a pour intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ et est paire, donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. Le changement de variable $x = \sqrt{2}t$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[0, +\infty[$ sur lui-même, conserve la nature de l'intégrale et donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} A_0$. Donc $A_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Calcul de A_1 . Pour $X > 0$, $\int_0^X t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^X = \frac{1}{2} (1 - e^{-X^2}) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Calcul de A_2 . Pour $X > 0$, on intègre par parties avec $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, X]$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = t e^{-t^2}$:

$$\int_0^X t^2 e^{-t^2} dt = \left[-\frac{t}{2} e^{-t^2} \right]_0^X + \frac{1}{2} \int_0^X e^{-t^2} dt \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} A_0.$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Convergence.

Pour x, t réels, $|e^{-t^2} \cos(2xt)| \leq e^{-t^2}$ et, pour $t \geq 0$, $|t e^{-t^2} \sin(2xt)| \leq t e^{-t^2}$. Les intégrales A_0 et A_1 convergent ; par comparaison, les deux intégrales convergent absolument.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt \text{ convergent.}$$

Partie I – Calcul d'une fonction auxiliaire

Partie I – La fonction F

$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$ est dérivable, $F' = -2G = -2xF$, d'où $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Corrigé – Partie I.

3. Continuité de F .

- a) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0 pour $\sin$ (de classe $\mathcal{C}^1$) entre 0 et u donne $\sin u = \int_0^u \cos t dt$. Comme $|\cos t| \leq 1$, $|\int_0^u \cos t dt| \leq |u|$:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\sin u| \leq |u|.$$

- b) Pour a, b réels, $\cos(a-b) - \cos(a+b) = (\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\cos a \cos b - \sin a \sin b) = 2 \sin a \sin b$. Avec $a = \frac{u+v}{2}$ et $b = \frac{v-u}{2}$, on a $a-b = u$ et $a+b = v$:

$$\cos u - \cos v = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{v-u}{2}\right).$$

- c) Soit x, h réels. Par linéarité des intégrales convergentes, puis b) et a) :

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |\cos(2xt+2ht) - \cos(2xt)| dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2 |\sin((2x+h)t)| |\sin(-ht)| dt \leq 2|h|A_1 = |h|. \end{aligned}$$

Ainsi $F(x+h) \rightarrow F(x)$ quand $h \rightarrow 0$ (encadrement) :

$$F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

4. Une majoration du reste.

- a) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour $\sin$ (de classe $\mathcal{C}^2$) entre 0 et u donne $\sin u = u - \int_0^u (u-t) \sin t dt$. Comme $|\sin t| \leq 1$,

$$|u - \sin u| = \left| \int_0^u (u-t) \sin t dt \right| \leq \left| \int_0^u |u-t| dt \right| = \frac{u^2}{2}, \quad |u - \sin u| \leq \frac{u^2}{2}.$$

- b) Comme $\cos(2xt+2ht) = \cos(2xt)\cos(2ht) - \sin(2xt)\sin(2ht)$, on a pour tout t :

$$\begin{aligned} \cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) &= \cos(2xt)\cos(2ht) - \sin(2xt)\sin(2ht) - \cos(2xt) \\ &= (2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt) - (1 - \cos(2ht)) \cos(2xt). \end{aligned}$$

Les intégrales $F(x+h)$, $F(x)$ et $G(x)$ convergent ; par linéarité, $F(x+h) - F(x) + 2hG(x)$ est l'intégrale de e^{-t^2} fois cette expression, et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (|(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt)| + |(1 - \cos(2ht)) \cos(2xt)|) dt. \end{aligned}$$

- c) D'après a), $|2ht - \sin(2ht)| \leq 2h^2t^2$; d'après a) de la question 3, $1 - \cos(2ht) = 2\sin^2(ht) \leq 2h^2t^2$. Les fonctions $|\sin|$, $|\cos|$ étant majorées par 1 :

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 4h^2t^2 dt = 4A_2h^2 = \sqrt{\pi}h^2.$$

$$C = \sqrt{\pi} \text{ convient : } \forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, |F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2.$$

5. Expression de F .

- a) Pour $h \neq 0$, $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + 2G(x) \right| \leq C|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = -2G.$$

- b) Soit $X > 0$. On intègre par parties avec $u(t) = \sin(2xt)$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, X]$, $u'(t) = 2x \cos(2xt)$, $v'(t) = te^{-t^2}$:

$$\int_0^X te^{-t^2} \sin(2xt) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(2xt) \right]_0^X + x \int_0^X e^{-t^2} \cos(2xt) dt.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}e^{-X^2} \sin(2xX) \rightarrow 0$. En faisant tendre X vers $+\infty$: $G(x) = xF(x)$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2xF(x).$$

- c) La fonction $x \mapsto F(x)e^{x^2}$ est dérivable de dérivée $(F'(x) + 2xF(x))e^{x^2} = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle est constante, égale à $F(0) = A_0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}.$$

Partie II – Fonction de Dirichlet et formule sommatoire de Poisson

Partie II – Noyau de Dirichlet

$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(u/2)}$, intégrale sur une période.

Corrigé – Partie II.

6. La fonction φ_n .

- a) Sur $\mathcal{D}$, $\sin(u/2) \neq 0$; φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions continues.
En 0 : $\sin((n+\frac{1}{2})u) \sim (n+\frac{1}{2})u$ et $2\sin(u/2) \sim u$, donc

$$\varphi_n \text{ est continue sur } \mathcal{D} \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} \varphi_n(u) = n + \frac{1}{2}.$$

- b) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et w tel que $2k\pi + w \in \mathcal{D}$. Comme $(n+\frac{1}{2})2k\pi = (2n+1)k\pi$ et $\sin(a+m\pi) = (-1)^m \sin a$ pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sin\left((n+\frac{1}{2})(2k\pi+w)\right) = (-1)^{(2n+1)k} \sin\left((n+\frac{1}{2})w\right) = (-1)^k \sin\left((n+\frac{1}{2})w\right),$$

$$2\sin\left(k\pi + \frac{w}{2}\right) = (-1)^k 2\sin \frac{w}{2}.$$

Donc $\varphi_n(2k\pi+w) = \varphi_n(w)$: φ_n est 2π -périodique sur $\mathcal{D}$, et d'après a), $\varphi_n(u) \rightarrow n+\frac{1}{2}$ quand $u \rightarrow 2k\pi$. En posant $\varphi_n(2k\pi) = n+\frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_n \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ (et } 2\pi\text{-périodique).}$$

- c) $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et pour $u \in \mathcal{D}$, numérateur et dénominateur sont des fonctions impaires de u , donc $\varphi_n(-u) = \varphi_n(u)$; les valeurs prolongées en $\pm 2k\pi$ sont égales.

$$\varphi_n \text{ est paire.}$$

7. Intégrale de φ_n .

D'après la relation admise, $\varphi_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku)$, et $\int_0^{2\pi} \cos(ku) du = \left[\frac{\sin(ku)}{k}\right]_0^{2\pi} = 0$ pour $k \geq 1$:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \pi.$$

8. Intégrale sur une période.

ψ étant continue, $\Phi : x \mapsto \int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^{x+T} \psi - \int_0^x \psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\psi(x+T) - \psi(x) = 0$. Elle est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $\Phi(0)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du.$$

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

$H(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\theta(x+2k\pi)^2}$; calcul de ses coefficients a_n et reconstruction de H .

Corrigé – Partie II.**9. La fonction H .**

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $k \geq \frac{|x|}{\pi}$, $|x \pm 2k\pi| \geq 2k\pi - |x| \geq k\pi$, donc

$$0 \leq f(x \pm 2k\pi) \leq e^{-\theta\pi^2 k^2} \leq e^{-\theta\pi^2 k} = (e^{-\theta\pi^2})^k,$$

terme général d'une série géométrique convergente ($0 < e^{-\theta\pi^2} < 1$). Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\sum_{k \geq 1} f(x + 2k\pi) \text{ et } \sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi) \text{ convergent.}$$

b) f est paire, donc $f(-x \pm 2k\pi) = f(x \mp 2k\pi)$ et $H(-x) = f(x) + \sum_k f(x - 2k\pi) + \sum_k f(x + 2k\pi) = H(x)$. La dérivée d'une fonction paire dérivable est impaire.

$$H \text{ est paire et } H' \text{ est impaire.}$$

De plus, en réindexant les séries,

$$H(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) + \sum_{k \geq 2} f(x + 2k\pi) + f(x) + \sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi) = H(x)$$

donc H est 2π -périodique, et H' aussi.

10. Coefficients de H .

a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, le changement de variable affine $u = x + 2k\pi$ et la 2π -périodicité de $\cos(n \cdot)$ donnent

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos(nx) dx &= \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu - 2kn\pi) du \\ &= \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu) du. \end{aligned}$$

En sommant pour $k \in \llbracket -N, N \rrbracket$ (les termes $f(x - 2k\pi)$ correspondant aux k négatifs) et par la relation de Chasles :

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du.$$

b) $|f(u) \cos(nu)| \leq e^{-\theta u^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ (même argument qu'en 1.a), donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) du$ converge ; la fonction intégrée est paire. Comme $-2N\pi \rightarrow -\infty$ et $2(N+1)\pi \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du.$$

- c) Soit $x \in [0, 2\pi]$ et $k \geq N + 1$. On a $x + 2k\pi \geq 2k\pi \geq 2(k-1)\pi \geq 0$ et $|x - 2k\pi| = 2k\pi - x \geq 2(k-1)\pi \geq 0$, donc $f(x+2k\pi)$ et $f(x-2k\pi)$ sont majorés par $e^{-4\theta\pi^2(k-1)^2}$. Ainsi

$$0 \leq H(x) - H_N(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} (f(x+2k\pi) + f(x-2k\pi)) \leq 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2(k-1)^2},$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 2\pi], \quad |H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}.$$

- d) Notons $r_N = 2 \sum_{k \geq N} e^{-4\theta\pi^2 k^2}$, reste d'une série convergente (même comparaison qu'en 9.a), donc $r_N \rightarrow 0$. H est continue ; par c),

$$\left| \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx \right| \leq 2\pi r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

et b) donne la première égalité. Pour la seconde, le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{\theta}}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[0, +\infty[$ sur lui-même, conserve la nature de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) du &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(2 \cdot \frac{n}{2\sqrt{\theta}} t\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\theta}} e^{-\frac{n^2}{4\theta}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right).$$

11. Sommes partielles.

- a) Pour tous réels u, x , $2 \cos(nu) \cos(nx) = \cos(n(u+x)) + \cos(n(u-x))$. Par linéarité et la relation admise en 7,

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(u+x)) + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(u-x)) \right] du,$$

$$\boxed{a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u+x) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u-x) du.$$

- b) Les changements de variable affines $v = u+x$ et $v = u-x$ donnent

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u+x) du &= \int_x^{x+2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv, \\ \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u-x) du &= \int_{-x}^{-x+2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv. \end{aligned}$$

Les fonctions $v \mapsto H(v \mp x) \varphi_N(v)$ sont continues et 2π -périodiques (9.b et 6.b) ; d'après la question 8, ces intégrales valent $\int_0^{2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv$ et $\int_0^{2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv$. Sur $]0, 2\pi[$, $\varphi_N(v) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})v)}{2 \sin(v/2)}$; la fonction intégrée ci-dessous est donc prolongeable par continuité en 0 et 2π , et

$$\boxed{a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin(v/2)} \sin\left((N+\frac{1}{2})v\right) dv.$$

c) Sur $]0, 2\pi[$, K_x est continue (quotient, $\sin(v/2) > 0$). Posons $N_x(v) = H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec $N'_x(v) = H'(v+x) + H'(v-x)$.

- En 0 : $N_x(0) = 0$ et $N'_x(0) = H'(x) + H'(-x) = 0$ (H' impaire), donc $N_x(v) = o(v)$; comme $2\sin(v/2) \sim v$, $K_x(v) \rightarrow 0 = K_x(0)$.
- En 2π : par 2π -périodicité, $N_x(2\pi) = 0$ et $N'_x(2\pi) = H'(x) + H'(-x) = 0$, donc $N_x(v) = o(v - 2\pi)$; comme $2\sin(v/2) = -2\sin(\frac{v-2\pi}{2}) \sim -(v - 2\pi)$, $K_x(v) \rightarrow 0 = K_x(2\pi)$.

K_x est continue sur $[0, 2\pi]$.

d) D'après la question 7, $2\pi H(x) = 2H(x) \int_0^{2\pi} \varphi_N(v) dv$. Avec b), et puisque $(H(v+x) + H(v-x) - 2H(x))\varphi_N(v) = K_x(v) \sin((N + \frac{1}{2})v)$ sur $]0, 2\pi[$:

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left((N + \frac{1}{2})v\right) dv.$$

12. Formule sommatoire de Poisson.

a) Soit $\lambda > 0$. On intègre par parties avec g et $w(t) = -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, $w'(t) = \sin(\lambda t)$:

$$\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{g(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Donc $\left| \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'|}{\lambda}$ (où g' est continue sur le segment), d'où

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

b) Soit $x \in [0, 2\pi]$. K_x étant continue sur $[0, 2\pi]$ (11.c), le résultat admis appliqué avec $\lambda = N + \frac{1}{2} \rightarrow +\infty$ et 11.d donnent $a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \rightarrow 2\pi H(x)$. Avec 10.d, $a_n = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-\frac{n^2}{4\theta}}$, donc la série converge et

$$\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{4\theta}} \cos(nx) \right) = 2\pi H(x).$$

En divisant par 2π , avec $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

Partie III – Une application probabiliste

Partie III – Un jeu de pile ou face

Le joueur qui reprend la main lance deux fois de plus que son adversaire ; probabilité de victoire de A.

Corrigé – Partie III.

13. Simulation.

- a) s est le nombre de lancers autorisés lors de la main en cours et j le numéro du lancer dans cette main. Au changement de main, le nouveau joueur dispose de deux lancers de plus et commence par son premier lancer :

$$s = s + 2$$

$$j = 1$$

- b) i est augmenté de 1 à chaque nouveau lancer, à partir de 1 : à la fin, c'est le rang du dernier lancer, qui est le premier « Pile ».

i est le nombre total de lancers de la partie.

- c) v vaut 1 lorsque A a la main et -1 lorsque B a la main ; en fin de partie, c'est le joueur ayant obtenu « Pile ».

$v = 1$: A lance; $v = -1$: B lance (à la fin : le vainqueur).

- d) On compte dans nA les lancers effectués par A (le premier lancer est de A) :

```
def jeu(p):
    i = 1
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    nA = 1
    while rd.random() > p:
        i = i + 1
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v
            s = s + 2
            j = 1
        if v == 1:
            nA = nA + 1    # lancer de rang i effectue par A
    if v == 1:
        print("A vainqueur")
    else:
        print("B vainqueur")
    print(nA)
```

- e) On simule un grand nombre N de parties et on calcule la fréquence des victoires de A (loi faible des grands nombres) :

```

def vainqueur(p):
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    while rd.random() > p:
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v
            s = s + 2
            j = 1
    return v

def proba_A(p, N):
    c = 0
    for k in range(N):
        if vainqueur(p) == 1:
            c = c + 1
    return c / N

```

14. Premières propriétés.

Notons $q = 1 - p \in]0, 1[$ et T le rang du premier « Pile » (avec $T = +\infty$ s'il n'y en a pas).

- a) Les lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p : pour $k \geq 1$, $P_p(T = k) = q^{k-1}p$ et $\sum_{k \geq 1} q^{k-1}p = 1$, donc $P_p(T < +\infty) = 1$. Or $H \cup K = [T < +\infty]$ (la partie s'arrête et désigne un vainqueur), donc $P_p(H \cup K) = 1$. Le nombre total de lancers est $X + Y = T$:

$$P_p(H \cup K) = 1, \quad X + Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

- b) L'événement « le premier lancer donne Pile » est inclus dans H , donc $p \leq P_p(H) \leq 1$. Par encadrement,

$$\lim_{p \rightarrow 1} P_p(H) = 1.$$

15. Calcul de $P_p(H)$.

- a) Numérotions les mains à partir de 0 : la main d'indice m comporte $2m + 1$ lancers, et les mains d'indices $0, \dots, m - 1$ comportent $\sum_{l=0}^{m-1} (2l + 1) = m^2$ lancers. La main d'indice m correspond donc aux rangs $m^2 + 1, \dots, (m + 1)^2$. A joue les mains d'indice pair $m = 2n$, de rangs $4n^2 + 1, \dots, (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 4n^2 + 1 ; 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket \quad (\text{il y a même égalité}).$$

De même, B joue les rangs $\llbracket (2n + 1)^2 + 1 ; (2n + 2)^2 \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}$.

- b) $H = [T \in I]$ est la réunion disjointe des événements $[4n^2 + 1 \leq T \leq (2n + 1)^2]$. Pour $1 \leq a \leq b$ entiers, $P_p(a \leq T \leq b) = P_p(T > a - 1) - P_p(T > b) = q^{a-1} - q^b$ (car $P_p(T > k) = q^k$). Par σ -additivité :

$$P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1 - p)^{4n^2} - (1 - p)^{4n^2 + 4n + 1} \right),$$

$$P_p(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^{(2n+1)^2} - (1-p)^{(2n+2)^2} \right).$$

16. Le jeu favorise A.

- a) Posons $S = \sum_{m \geq 0} (-1)^m q^{m^2}$, série absolument convergente ($q^{m^2} \leq q^m$). En regroupant les termes deux par deux, 15.b donne $P_p(H) = \sum_{n \geq 0} (q^{(2n)^2} - q^{(2n+1)^2}) = S$. Choisissons $\theta > 0$ tel que $e^{-\frac{1}{4\theta}} = q$, c'est-à-dire $\theta = -\frac{1}{4 \ln q}$ (possible car $0 < q < 1$). La formule de 12.b en $x = \pi \in [0, 2\pi]$, avec $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donne

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} \right) = e^{-\theta\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(2k+1)^2\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(2k-1)^2\pi^2} > 0.$$

Or $\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n q^{n^2} = S - \frac{1}{2}$. Donc $S - \frac{1}{2} > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

- b) D'après a), $P_p(H) = S > \frac{1}{2}$ et, par 14.a, $P_p(K) = 1 - P_p(H) < \frac{1}{2}$.

Pour tout $p \in]0, 1[$, $P_p(H) > \frac{1}{2} > P_p(K)$: le jeu est toujours favorable à A.

Bien que B dispose à chaque main de deux lancers de plus, l'avantage de commencer l'emporte.