

HEC Paris – ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2018

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Préliminaire	2
	<i>Thèmes abordés : intégrales généralisées ; intégrales.</i>	2
2	Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.</i>	2
3	Partie II. Fonction de Dirichlet et formule sommatoire de Poisson	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries ; intégrales généralisées.</i>	3
4	Partie III. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson	4
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python.</i>	4

Hormis le résultat de la question 12.b), la partie IV est indépendante du préliminaire et des parties I, II et III.

1 Préliminaire

Thèmes abordés : intégrales généralisées ; intégrales.

1. a) Établir, pour tout entier naturel k , la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.
On pose alors $A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $A_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.
b) Calculer A_0 , A_1 et A_2 .
2. Dédire de la question 1.a) la convergence, pour tout réel x , des deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

2 Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.

On note F et G respectivement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

Dans cette partie, on veut montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$.

3. a) À l'aide d'une formule de Taylor, établir pour tout réel u l'inégalité $|\sin(u)| \leq |u|$.
b) Pour tous réels u et v , justifier la formule trigonométrique

$$\cos(u) - \cos(v) = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{v-u}{2}\right).$$

- c) En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. a) Pour tout réel u , justifier à l'aide d'une formule de Taylor l'inégalité $|u - \sin(u)| \leq \frac{u^2}{2}$.
b) Pour tous réels x et h , établir l'inégalité

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (|(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt)| + |(1 - \cos(2ht)) \cos(2xt)|) dt.$$

- c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tous $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2$.
5. a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée F' à l'aide de la fonction G .
b) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x , $F'(x) = -2xF(x)$.
c) En déduire que, pour tout réel x , $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

3 Partie II. Fonction de Dirichlet et formule sommatoire de Poisson

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; séries ; intégrales généralisées.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\forall u \in \mathcal{D}, \quad \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin(u/2)}.$$

- Montrer que la fonction φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ et prolongeable par continuité en 0.
 - En déduire que la fonction φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que la fonction φ_n est paire.
7. On admet, pour tout réel u , la relation

$$\sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du$.

8. Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T . Établir, pour tout réel x , l'égalité

$$\int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du.$$

Dans cette partie, on note θ un réel strictement positif fixé et l'on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\theta x^2}$.

9. a) Montrer que, pour tout réel x , les deux séries $\sum_{k \geq 1} f(x + 2k\pi)$ et $\sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi)$ sont convergentes.

On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2k\pi).$$

On admet dans toute la suite du problème que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Préciser la parité de la fonction H et de sa fonction dérivée H' .
10. Dans cette question, n est un entier naturel fixé. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit H_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^N f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^N f(x - 2k\pi).$$

- Établir l'égalité $\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du$.
- En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du$.

c) Établir, pour tout réel x , l'inégalité $|H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}$.

d) En déduire les égalités

$$\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right).$$

11. Soit $x \in [0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx$.

a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u+x) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u-x) du.$$

b) En déduire l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin(v/2)} \right) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv.$$

c) Justifier la continuité sur le segment $[0, 2\pi]$ de la fonction K_x définie par

$$K_x(v) = \begin{cases} \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2 \sin(v/2)} & \text{si } v \in]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi. \end{cases}$$

d) À l'aide de la question 7, établir l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv.$$

12. a) Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

On admet plus généralement que si g est une fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$), alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

b) Établir, pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$ et pour tout réel $\theta > 0$, la relation

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

4 Partie III. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python.

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie. Le jet donne « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $1 - p$. Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient « Pile » le premier, auquel cas la partie s'arrête.

Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A. Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs 2, 3 et 4) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs 5, 6, 7, 8 et 9) par le joueur A, et ainsi de suite. Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer, au maximum, deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur. On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

13. a) Compléter la fonction Python suivante, qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
from random import random

def jeu(p):
    i = 1
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    while random() > p:
        i = i + 1
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v # changement de main
            s = ...
            j = ...
    if v == 1:
        print("A vainqueur")
    else:
        print("B vainqueur")
```

- b) Que représente la valeur de i après l'exécution de la fonction `jeu` ?
- c) Préciser la signification de la variable v .
- d) Compléter le code de la fonction `jeu` pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par le joueur A.
- e) Écrire un code Python permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit le joueur A.
14. On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$. On note :
- X le nombre de lancers effectués par le joueur A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers : $1, 5, 6, \dots$;
 - Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers : $2, 3, 4, \dots$;
 - H l'événement aléatoire « le vainqueur est A » ;
 - K l'événement aléatoire « le vainqueur est B ».
- a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.
- b) Montrer que $\lim_{p \rightarrow 1} P_p(H) = 1$.
15. a) Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1\}$.
- b) Démontrer que $P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \right)$. Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

16. a) En utilisant le résultat de la question 12.b), établir l'inégalité stricte suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

- b) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?