

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2018

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Partie I – Séries télescopiques

Partie I – La série $\sum(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1})$

Ses sommes partielles valent $X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$; étude de leur convergence en loi.

Corrigé – Partie I.

Lemme (somme de deux normales indépendantes). Soit $a, b > 0$, $A \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2)$ et $B \hookrightarrow \mathcal{N}(0, b^2)$ indépendantes. Les densités étant bornées, le théorème de convolution donne une densité h de $A + B$: avec $c^2 = a^2 + b^2$ et $\tau^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$, on vérifie en développant que $\frac{t^2}{a^2} + \frac{(x-t)^2}{b^2} = \frac{(t-xa^2/c^2)^2}{\tau^2} + \frac{x^2}{c^2}$, d'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2} - \frac{(x-t)^2}{2b^2}} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2c^2}}}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-xa^2/c^2)^2}{2\tau^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} \tau}{2\pi ab} e^{-\frac{x^2}{2c^2}} = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2c^2}}, \end{aligned}$$

Ainsi $A + B \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2 + b^2)$.

1. Un exemple.

a) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ (somme télescopique).

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

b) Cette série s'écrit $\sum(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1})$ avec $X_n = 1$ pour tout n :

X suit la loi certaine égale à 1.

2. La suite (Y_n) .

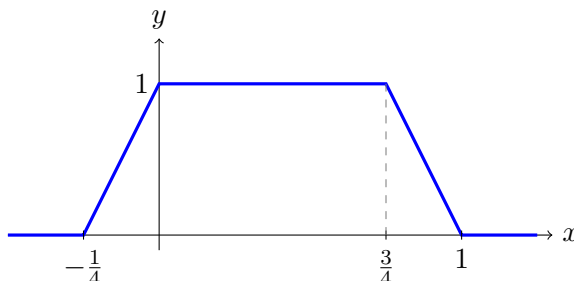
a) f_n est positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. L'intégrale de f_n est la somme des aires de deux triangles de base $\frac{1}{n+1}$ et de hauteur 1 et d'un rectangle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \frac{1}{2(n+1)} + c_n \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1 + nc_n}{n+1}.$$

Cette intégrale vaut 1 si et seulement si $c_n = 1$.

$$\boxed{c_n = 1.}$$

Pour $n = 3$, f_3 croît linéairement de 0 à 1 sur $[-\frac{1}{4}, 0]$, vaut 1 sur $]0, \frac{3}{4}[$ et décroît linéairement de 1 à 0 sur $[\frac{3}{4}, 1]$:



b) $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$. En calculant sur chaque intervalle :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n+1}, \\ \frac{(1 + (n+1)x)^2}{2(n+1)} & \text{si } -\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0, \\ x + \frac{1}{2(n+1)} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}, \\ 1 - \frac{(n+1)(1-x)^2}{2} & \text{si } \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(Les raccords sont cohérents : en 0, les deux expressions valent $\frac{1}{2(n+1)}$; en $\frac{n}{n+1}$, elles valent $\frac{2n+1}{2(n+1)}$.)

Avec $c_n = 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (elle vaut 0 en $-\frac{1}{n+1}$ et en 1, et 1 en 0 et en $\frac{n}{n+1}$). F_n est une primitive de la fonction continue f_n , donc

$$\boxed{F_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$: pour n assez grand, $x < -\frac{1}{n+1}$, donc $F_n(x) = 0$.
- Si $0 \leq x < 1$: pour n assez grand, $x \leq \frac{n}{n+1}$, donc $F_n(x) = x + \frac{1}{2(n+1)} \rightarrow x$.
- Si $x \geq 1$: $F_n(x) = 1$.

La limite est, en tout point de $\mathbb{R}$, la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).}$$

3. Cas d'une densité bornée.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme X_{n+1} a même loi que X , de fonction de répartition F :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_{n+1}}{n+1}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|X| > (n+1)\varepsilon) \leq 1 - F((n+1)\varepsilon) + F(-(n+1)\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

car F tend vers 1 en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.

$$\boxed{\left(\frac{X_{n+1}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } 0.}$$

- b) La suite constante (X_1) converge en probabilité vers X_1 . Par somme, $D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ converge en probabilité vers X_1 , donc en loi vers X_1 (résultat admis en préambule). Comme X_1 a la loi de X :

$$(D_n) \text{ converge en loi vers } X.$$

- c) La variable $Z = -\frac{X_{n+1}}{n+1}$ a pour fonction de répartition $z \mapsto \mathbb{P}(X_{n+1} \geq -(n+1)z) = 1 - F(-(n+1)z)$ (X_{n+1} est à densité). En dérivant là où c'est possible, Z admet pour densité $g : z \mapsto (n+1)f(-(n+1)z)$, bornée. X_1 et Z sont indépendantes ; par le théorème de convolution (f bornée), $D_n = X_1 + Z$ admet pour densité

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-(n+1)(x-t)) dt,$$

$$f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f((n+1)(t-x)) dt.$$

- d) Prenons $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, de densité bornée $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Alors $f(t)f((n+1)(t-x)) = 1$ si et seulement si $t \in [0, 1] \cap [x, x + \frac{1}{n+1}]$, donc $f_{D_n}(x) = (n+1)\ell(x)$ où $\ell(x)$ est la longueur de cet intervalle :

- $\ell(x) = 0$ si $x < -\frac{1}{n+1}$ ou $x > 1$;
- $\ell(x) = x + \frac{1}{n+1}$ si $-\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0$, d'où $f_{D_n}(x) = 1 + (n+1)x$;
- $\ell(x) = \frac{1}{n+1}$ si $0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}$, d'où $f_{D_n}(x) = 1$;
- $\ell(x) = 1 - x$ si $\frac{n}{n+1} \leq x \leq 1$, d'où $f_{D_n}(x) = (n+1)(1-x)$.

Ainsi $f_{D_n} = f_n : Y_n$ a même loi que D_n , qui converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ d'après b).

$$\text{On retrouve que } (Y_n) \text{ converge en loi vers la loi } \mathcal{U}([0, 1]).$$

4. Cas gaussien.

- a) $\frac{X_n}{n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{n^2})$ et $-\frac{X_{n+1}}{n+1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{(n+1)^2})$ (transformations affines de variables normales) sont indépendantes ; d'après le lemme :

$$U_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

- b) Par télescopage, $T_n = \sum_{k=1}^n U_k = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1} = D_n$. La densité normale est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; d'après 3.b), (T_n) converge en loi vers X :

$$\sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge en loi, vers la loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

- c) (i) Par récurrence à l'aide du lemme, $T'_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(2) + (\zeta(2) - 1) = \frac{\pi^2}{3} - 1 = \sigma^2 > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(T'_n \leq x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ par continuité de Φ .

$$(T'_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi } \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{3} - 1\right).$$

- (ii) Les U_k ne sont pas indépendantes (U_k et U_{k+1} font intervenir X_{k+1}), alors que les U'_k le sont. La loi d'une somme dépend de la loi conjointe des termes, pas seulement de leurs lois individuelles : il n'y a aucune raison que T_n et T'_n aient la même loi.

Pas de contradiction : T_n et T'_n n'ont pas la même loi
(limites $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0, \frac{\pi^2}{3} - 1)$).

Partie II – Séries harmoniques « lacunaires »

Partie II – Effacement de termes de la série harmonique

Carrés et cubes ; nombres impairs et constante $\delta = \lim(h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n})$.

Corrigé – Partie II.

5. Carrés et cubes.

a) Les carrés inférieurs ou égaux à n sont les j^2 avec $1 \leq j \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$:

$$h_n(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{j^2}.$$

b) Comme $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \rightarrow +\infty$ et que les sommes partielles de $\sum \frac{1}{j^2}$ convergent vers $\zeta(2)$:

$$(h_n(\mathcal{D})) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Si $m = c^6$ avec $c \in \mathbb{N}^*$, alors $m = (c^3)^2 = (c^2)^3 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$. Réciproquement, soit $m = a^2 = b^3$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = b\sqrt{b}$, donc $\sqrt{b} = \frac{a}{b}$ est rationnel ; d'après le résultat admis, $b \in \mathcal{D} : b = c^2$ avec $c \in \mathbb{N}^*$, et $m = c^6$, soit $m^{1/6} = c \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m^{1/6} \in \mathbb{N}^*\} = \{c^6 ; c \in \mathbb{N}^*\}.$$

d) $\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}} = \mathbf{1}_{\mathcal{D}} + \mathbf{1}_{\mathcal{T}} - \mathbf{1}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{T}}$, donc, comme en a),

$$h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/3} \rfloor} \frac{1}{j^3} - \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/6} \rfloor} \frac{1}{j^6}.$$

Les trois bornes tendent vers $+\infty$ et les séries de Riemann d'exposants 2, 3, 6 convergent :

$$(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T})) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).$$

6. Les entiers impairs.

a) Pour $t \in [n, n+1]$, $2t-1 \geq 2n-1 > 0$, et

$$0 \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} = \frac{2(t-n)}{(2n-1)(2t-1)} \leq \frac{2(t-n)}{(2n-1)^2} \leq \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un intervalle de longueur 1 :

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

- b) Notons $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: les entiers impairs de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont $1, 3, \dots, 2m-1$, donc $h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1}$. Par définition de u_k et relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} - \int_1^{m+1} \frac{dt}{2t-1},$$

et $m+1 = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$:

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{dt}{2t-1}.$$

- c) Si $n = 2r - 1$ est impair, $\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor = r + 1$ et $2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1 = n + 2$; si $n = 2r$ est pair, $\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor = r + 1$ et $2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1 = n + 1$. Dans les deux cas, le réel $\frac{1}{n}(2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1)$ appartient à $[1, 1 + \frac{2}{n}]$; comme $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ pour $u \geq 0$:

$$0 \leq \ln\left(\frac{1}{n}\left(2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1\right)\right) \leq \frac{2}{n}.$$

- d) D'après a), $0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$: par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

Notons $q = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$. On a $\int_1^q \frac{dt}{2t-1} = \frac{1}{2} \ln(2q-1)$, donc d'après b),

$$h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2q-1}{n}\right).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rightarrow +\infty$, donc la somme tend vers δ , et le logarithme tend vers 0 par c) (encadrement).

$$\sum u_n \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}) = \delta.$$

- e) La fonction $t \mapsto \frac{2}{(2t-1)^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq n+1 \geq 2$ et $t \in [k-1, k]$, $\frac{2}{(2k-1)^2} \leq \frac{2}{(2t-1)^2}$, donc $\frac{2}{(2k-1)^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{2dt}{(2t-1)^2}$. En sommant et avec a) :

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{2dt}{(2t-1)^2} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2N-1} \leq \frac{1}{2n-1}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n-1}.$$

- f) Avec $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et la formule de d) :

$$\delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2q-1}{n}\right).$$

Le reste est positif et majoré par $\frac{1}{2m-1}$ (question e)) ; comme $2m \geq n$, $2m-1 \geq n-1 > n-2 > 0$ pour $n \geq 3$. Le logarithme est compris entre 0 et $\frac{2}{n}$ (question c)).

$$-\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}) \leq \frac{1}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

- g)** (i) Au départ, $n = 3$ et $\mathbf{s}$ contient $h_3(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{3}$. Comme $\frac{1}{3-2} = 1 > 0,2$, on passe à $n = 5$; comme $\frac{1}{3} > 0,2$, on passe à $n = 7$; comme $\frac{1}{5} = 0,2$, la boucle s'arrête.

$\mathbf{s}$ prend successivement les valeurs $h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}$ pour $n = 3, 5, 7$, soit environ 0,784 ; 0,729 ; 0,703.

- (ii) Pour n impair, $h_n(\mathcal{I}) = h_{n-2}(\mathcal{I}) + \frac{1}{n}$ et $\ln \sqrt{n} = \ln \sqrt{n-2} + \frac{1}{2}(\ln n - \ln(n-2))$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s} + 1/n + (\text{np.log}(n-2) - \text{np.log}(n))/2$$

- (iii) La suite $\frac{1}{n-2}$ tend vers 0 : la boucle s'arrête pour tout $\mathbf{eps} > 0$. À la sortie, $n \geq 3$ est impair, $\mathbf{s} = h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}$ et $\frac{1}{n-2} \leq \mathbf{eps}$. D'après f), $|\delta - \mathbf{s}| \leq \max(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-2}) = \frac{1}{n-2} \leq \mathbf{eps}$.

La valeur renvoyée approche δ à $\mathbf{eps}$ près, pour tout $\mathbf{eps} > 0$.

Partie III – Séries de Riemann alternées

Partie III – La série aléatoire $\sum \frac{X_n}{n}$

Transformation d'Abel, inégalité de concentration, convergence presque sûre, en probabilité puis en loi.

Corrigé – Partie III.

7. Transformation d'Abel.

a) (i) Avec $s_0 = 0$, $x_k = s_k - s_{k-1}$ pour $k \geq 1$, donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^n \frac{s_{k-1}}{k^\beta} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\beta},$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right).$$

(ii) On a $\beta > \alpha \geq 0$. D'une part $|\frac{s_n}{n^\beta}| \leq M n^{\alpha-\beta} \rightarrow 0$. D'autre part, par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto t^{-\beta}$ sur $[k, k+1]$ (dérivée de valeur absolue $\beta t^{-\beta-1} \leq \beta k^{-\beta-1}$) :

$$\left| s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) \right| \leq M k^\alpha \cdot \frac{\beta}{k^{\beta+1}} = \frac{M\beta}{k^{1+\beta-\alpha}},$$

terme général d'une série de Riemann convergente ($1 + \beta - \alpha > 1$). La série $\sum s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right)$ converge absolument, et d'après (i) les sommes partielles de $\sum \frac{x_k}{k^\beta}$ convergent.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^\beta} \text{ converge.}$$

b) Avec $x_n = (-1)^n$, $s_n \in \{-1, 0\}$, donc $|s_n| \leq 1 \cdot n^0$: on applique a) avec $\alpha = 0$, $M = 1$ et $\beta = x > 0$.

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x} \text{ converge.}$$

8. Une inégalité de concentration.

a) $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^n e^{tX_k}$, les e^{tX_k} étant indépendantes (fonctions de variables indépendantes) et bornées, d'espérance $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$:

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n.$$

b) $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$ (les termes impairs se compensent) et $e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$. Or $(2k)! = \prod_{j=1}^k (2j)(2j-1) \geq \prod_{j=1}^k 2j = 2^k k!$. En comparant terme à terme (termes positifs) :

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

- c) $[S_n > s] \subset [e^{tS_n} \geq e^{ts}]$ ($t > 0$). L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive e^{tS_n} , puis a) et b), donnent

$$\mathbb{P}([S_n > s]) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ts}} \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right).$$

- d) Avec $t = \frac{s}{n} > 0$, $\frac{nt^2}{2} - ts = -\frac{s^2}{2n}$, donc $\mathbb{P}([S_n > s]) \leq e^{-\frac{s^2}{2n}}$. Les $-X_k$ sont indépendantes et de même loi que les X_k , donc $-S_n$ a même loi que S_n et $\mathbb{P}([S_n < -s]) = \mathbb{P}([-S_n > s]) \leq e^{-\frac{s^2}{2n}}$. Comme $[|S_n| > s] = [S_n > s] \cup [S_n < -s]$:

$$\mathbb{P}([|S_n| > s]) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

9. L'événement $\mathcal{C}_\alpha$.

- a) Chaque $[|S_k| > k^\alpha]$ appartient à $\mathcal{A}$ (S_k est une variable aléatoire) ; une tribu est stable par réunion et intersection dénombrables.

$$\mathcal{C}_\alpha \in \mathcal{A}.$$

- b) D'après 8.d) avec $s = n^\alpha$: $0 \leq \mathbb{P}([|S_n| > n^\alpha]) \leq 2 \exp(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2})$. Comme $\gamma = 2\alpha - 1 > 0$, $n^2 \exp(-\frac{n^\gamma}{2}) \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc ce majorant est $o(\frac{1}{n^2})$.

$$\text{Pour } \alpha > \frac{1}{2}, \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}([|S_n| > n^\alpha]) \text{ converge.}$$

- c) Pour tout n , $\mathcal{C}_\alpha \subset \bigcup_{k \geq n} [|S_k| > k^\alpha]$, donc par sous-additivité

$$0 \leq \mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([|S_k| > k^\alpha]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(reste d'une série convergente).

$$\forall \alpha > \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha) = 0.$$

10. La série $\sum \frac{X_n}{n}$.

- a) Soit $\omega \in \overline{\mathcal{C}_\alpha}$: il existe n_0 tel que $|S_k(\omega)| \leq k^\alpha$ pour tout $k \geq n_0$. Avec $M = \max(1, |S_1(\omega)|, \dots, |S_{n_0}(\omega)|)$, on a $|S_k(\omega)| \leq Mk^\alpha$ pour tout $k \geq 1$ (car $k^\alpha \geq 1$). La question 7.a), appliquée à $x_k = X_k(\omega)$ et $\beta = 1 > \alpha$, montre que $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge.

$$0 \leq \alpha < 1 \implies \overline{\mathcal{C}_\alpha} \subset \mathcal{C}.$$

- b) Avec $\alpha = \frac{3}{4} \in]\frac{1}{2}, 1[$: $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq \mathbb{P}(\overline{\mathcal{C}_\alpha}) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha) = 1$.

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1.$$

- c) Si $\omega \in \mathcal{C}$, $K_n(\omega) \rightarrow K(\omega)$: il existe N tel que $|K(\omega) - K_n(\omega)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, donc $\omega \notin E(\varepsilon)$. Ainsi $E(\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$.

Les événements $A_N = \bigcup_{n \geq N} [|K - K_n| > \varepsilon]$ forment une suite décroissante d'intersection $E(\varepsilon)$; par le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(A_N) \rightarrow \mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$. Comme $[|K - K_N| > \varepsilon] \subset A_N$:

$$0 \leq \mathbb{P}(|K - K_N| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0 \text{ et } (K_n) \text{ converge en probabilité vers } K.}$$

11. La série $\sum \frac{B_n}{n}$.

a) Par linéarité, puis par indépendance :

$$\mathbb{E}(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \mathbb{V}(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{24}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(H_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty, \quad \mathbb{V}(H_n) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{24}.$$

b) Soit $r > 0$. Pour n assez grand, $\mathbb{E}(H_n) > r$ et $[H_n \leq r] \subset [|H_n - \mathbb{E}(H_n)| \geq \mathbb{E}(H_n) - r]$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et $\mathbb{V}(H_n) \leq \frac{\pi^2}{24}$:

$$0 \leq \mathbb{P}([H_n \leq r]) \leq \frac{\mathbb{V}(H_n)}{(\mathbb{E}(H_n) - r)^2} \leq \frac{\pi^2}{24(\mathbb{E}(H_n) - r)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([H_n \leq r]) = 0.}$$

c) (i) $H_n - h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k - 1_{\mathcal{I}}(k)}{k}$ et $-1_{\mathcal{I}}(k) = \frac{(-1)^k - 1}{2}$:

`y[i] = y[i] + (rd.binomial(1, 0.5) + ((-1)**k - 1)/2) / k`

(ii) Par exemple, pour chaque valeur de n , on simule un grand nombre de valeurs puis on trace l'histogramme :

```
import matplotlib.pyplot as plt
for n in [50, 100, 200]:
    y = simul(n, 10000)
    plt.hist(y, 20, density=True)
    plt.show()
```

(iii) Les trois histogrammes ont pratiquement la même forme et la même position : la distribution de $H_n - h_n(\mathcal{I})$ semble se stabiliser quand n augmente, ce qui suggère la convergence des fonctions de répartition, donc la convergence en loi.

12. Identification de la limite.

a) $\frac{B'_k}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{X_k}{2k}$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$. Or $\frac{1}{2k} - \frac{1_{\mathcal{I}}(k)}{k}$ vaut $-\frac{1}{2k}$ si k est impair et $\frac{1}{2k}$ si k est pair, c'est-à-dire $\frac{(-1)^k}{2k}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

b) *Limite de la somme.* Comme $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$ et $|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt| \leq \frac{1}{n+1}$; donc $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k} \rightarrow -\frac{\ln 2}{2}$.

Convergence. D'après 10.c), $K_n \rightarrow K$ en probabilité ; par composition par une fonction continue et somme avec la suite déterministe (c_n) , $\frac{K_n}{2} + c_n \rightarrow \frac{K}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ en probabilité, donc en loi (résultat admis).

Égalité des lois. Les B'_k sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, comme les B_k ; les vecteurs $(B_1, \dots, B_n)$ et $(B'_1, \dots, B'_n)$ ont donc même loi, et $H_n - h_n(\mathcal{I})$, qui s'en déduit par la même fonction que $\frac{K_n}{2} + c_n$, a même loi que $\frac{K_n}{2} + c_n$. Les fonctions de répartition étant les mêmes :

$$(H_n - h_n(\mathcal{I})) \text{ converge en loi vers } \lambda K + \mu \text{ avec } \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{\ln 2}{2}.$$

On retrouve les histogrammes : espérance $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$ et écart-type $\frac{1}{2}\sqrt{\zeta(2)} \approx 0,64$.