

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2018

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Partie I – Séries télescopiques	2
	<i>Thèmes abordés : séries ; variables à densité ; convergences de variables.</i>	<i>2</i>
2	Partie II – Séries harmoniques « lacunaires »	3
	<i>Thèmes abordés : séries ; intégrales.</i>	<i>3</i>
3	Partie III – Séries de Riemann alternées	3
	<i>Thèmes abordés : séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python. .</i>	<i>3</i>

Problème – Séries aléatoires

On rappelle que la série $\sum_{n \geq 1} n^{-x}$ converge si et seulement si $x > 1$. On note ζ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} n^{-x}$ et l'on admet $\zeta(2) = \pi^2/6$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 Partie I – Séries télescopiques

Thèmes abordés : séries ; variables à densité ; convergences de variables.

Dans cette partie, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X de référence. On étudie la convergence de la série aléatoire $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1} \right)$.

1. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme. Dans cet exemple, quelle est la loi de X ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n une variable aléatoire de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n+1} \text{ ou } x > 1, \\ 1 + (n+1)x & \text{si } -\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0, \\ c_n & \text{si } 0 < x < \frac{n}{n+1}, \\ (n+1)(1-x) & \text{si } \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où $c_n > 0$. Calculer c_n et représenter f_n ; déterminer la fonction de répartition F_n et dire si elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

3. On suppose désormais que X possède une densité bornée f . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$.
 - a) Montrer que $\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \right)$ converge en probabilité vers 0.
 - b) **Rappel (lemme de Slutsky).** Si U_n converge en loi vers U et V_n converge en probabilité vers une constante c , alors $U_n + V_n$ converge en loi vers $U + c$. En déduire que (D_n) converge en loi vers X .
 - c) Justifier que D_n admet la densité f_{D_n} définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f((n+1)(t-x)) dt$.
 - d) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 2.
4. On suppose que X suit la loi normale centrée réduite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n U_k$.
 - a) Déterminer la loi de U_n , puis justifier la convergence en loi de $\sum_{n \geq 1} U_n$.
 - b) Soit (U'_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telle que U'_n et U_n aient même loi. En posant $T'_n = \sum_{k=1}^n U'_k$, justifier que (T'_n) converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\pi^2/3 - 1$, puis expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les précédents.

2 Partie II – Séries harmoniques « lacunaires »

Thèmes abordés : séries ; intégrales.

Pour toute partie G de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{1}_G$ désigne sa fonction indicatrice et, pour $n \geq 1$, on pose $h_n(G) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{1}_G(k)}{k}$.

5. Posons $\mathcal{D} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{T} = \{n^3 : n \in \mathbb{N}^*\}$.

- Exprimer $h_n(\mathcal{D})$ à l'aide d'une somme partielle de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} n^{-2}$, puis en déduire la convergence de $(h_n(\mathcal{D}))$ et calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$.
- Justifier que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ est l'ensemble des entiers m tels que $m^{1/6} \in \mathbb{N}^*$. On admet que la racine carrée d'un entier naturel n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ est irrationnelle.
- Montrer que $(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))$ converge et exprimer $\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n}$ à l'aide de valeurs de ζ .

6. On note $\mathcal{I} = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \right) dt$.

- Établir $0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$.
- Montrer $h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} \frac{dt}{2t-1}$.
- Justifier $0 \leq \ln\left(\frac{1}{n} \left(2 \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1\right)\right) \leq \frac{2}{n}$; montrer que la série de terme général u_n converge. En posant $\delta = \sum_{n \geq 1} u_n$, établir $\lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}) = \delta$.
- Montrer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n-1}$, puis justifier, pour $n \geq 3$, $-\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln \sqrt{n}) \leq \frac{1}{n-2}$.
- La fonction `delta` ci-dessous calcule successivement des valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})$ jusqu'à atteindre une précision donnée.

```
def delta(eps):
    n = 3
    s = 1 + 1/3 - log(3)/2
    while 1/(n-2) > eps:
        n = n + 2
        s = s + 1/n + ...
    return s
```

Quelles valeurs successives sont affectées à `s` pour `eps=0.2` ? Compléter la ligne manquante et expliquer pourquoi l'algorithme assure une précision arbitraire.

3 Partie III – Séries de Riemann alternées

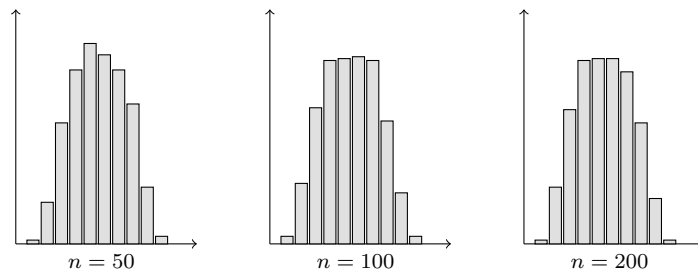
Thèmes abordés : séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, +1\}$; pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

7. Soit (x_n) une suite réelle et $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $M > 0$ tels que $|s_n| \leq Mn^\alpha$.

- Pour $\beta > \alpha$, montrer, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right)$, puis en déduire la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^\beta}$.

- b) Justifier, pour $x > 0$, la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
8. Soient $s, t > 0$ et $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}(e^{tS_n})$; établir $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{t^2/2}$; à l'aide de Markov, montrer $\mathbb{P}(|S_n| > s) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.
9. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [|S_k| > k^\alpha] \right)$. Justifier que $C_\alpha \in \mathcal{A}$, montrer que pour $\alpha > 1/2$ la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha)$ converge, puis en déduire $\mathbb{P}(C_\alpha) = 0$.
10. On étudie $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{n}$. Soit C l'ensemble des ω pour lesquels cette série numérique converge et $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$. On pose $K(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\omega)$ si $\omega \in C$, et $K(\omega) = 0$ sinon ; on admet que $C \in \mathcal{A}$ et que K est une variable aléatoire.
- a) En utilisant la question 7, montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, alors $\overline{C_\alpha} \subset C$.
- b) À l'aide de la question 9, montrer $\mathbb{P}(C) = 1$.
- c) Pour $\varepsilon > 0$, poser $E(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon] \right)$. Montrer $\mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$ et en déduire que (K_n) converge en probabilité, puis en loi, vers K .
11. Dans les questions 11 et 12, (B_n) est une suite de variables indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k}$.
- a) Déterminer l'espérance et la variance de H_n , et leurs limites ; montrer que, pour tout $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([H_n \leq r]) = 0$.
- b) Écrire une fonction Python qui effectue p simulations de $H_n - h_n(\mathcal{I})$, puis indiquer des instructions permettant de tracer les histogrammes pour $n = 50, 100$ et 200 , et expliquer ce qu'ils suggèrent. Les histogrammes figurant dans le sujet d'origine sont reproduits ci-dessous en TikZ.



12. Pour $n \geq 1$, on pose $B'_n = \frac{1+X_n}{2}$.
- a) Justifier $\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}$.
- b) En déduire que $(H_n - h_n(\mathcal{I}))$ converge en loi vers une variable de la forme $\lambda K + \mu$, où λ et μ sont à préciser.