

Ecricome

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2019

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Intégrales de Wallis et séries

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

On étudie les valeurs, la limite et des bornes de ces intégrales, puis les séries de termes généraux I_n et $(-1)^n I_n$.

Corrigé – Exercice 1 – Intégrales de Wallis et séries.

1. Existence des intégrales et premières valeurs.

Pour $n = 0$, la fonction à intégrer est la fonction constante égale à 1. Pour $n \geq 1$, $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$. Les intégrales sont donc toutes bien définies. On obtient

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

L'identité $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ donne

$$I_2 = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi

$$I_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Monotonie, relation de récurrence et calcul des termes.

- a) Sur $[0, \pi/2]$, $0 \leq \cos t \leq 1$. Ainsi $(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$ et $I_{n+1} \leq I_n$. L'inégalité est stricte : la fonction $(\cos t)^n(1 - \cos t)$ est continue, positive sur $]0, \pi/2[$, et son intégrale est donc strictement positive. La suite est ainsi strictement décroissante. Comme $I_n \geq 0$, le théorème de convergence monotone donne

$$(I_n) \text{ est strictement décroissante et converge vers } \ell \geq 0.$$

- b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t dt.$$

On effectue une intégration par parties sur le segment $[0, \pi/2]$ avec

$$u(t) = (\cos t)^{n+1}, \quad u'(t) = -(n+1) \sin t (\cos t)^n, \quad v(t) = \sin t, \quad v'(t) = \cos t.$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment. Le terme $[(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\pi/2}$ est nul, et donc

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} ((\cos t)^n - (\cos t)^{n+2}) dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}), \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- c) En appliquant successivement cette récurrence aux indices pairs, puis aux indices impairs, on obtient, pour $n \geq 1$,

$$I_{2n} = I_0 \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}, \quad I_{2n+1} = I_1 \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}.$$

Or

$$\prod_{j=1}^n 2j = 2^n n!, \quad \prod_{j=1}^n (2j-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \prod_{j=1}^n (2j+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

En utilisant $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Pour $n = 0$, les formules donnent directement les deux valeurs initiales puisque $0! = 1$.

- d) La récurrence appliquée à l'indice $2k-2$ donne $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$, et celle appliquée à l'indice $2k-1$ donne $I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1}$. On complète donc la fonction en calculant ces deux termes à chaque tour :

```
import numpy as np
```

```
def I(m):
```

```
    y = [0.0] * (2*m + 2)
```

```
    y[0] = np.pi / 2
```

```
    y[1] = 1.0
```

```
    for k in range(1, m + 1):
```

```
        y[2*k] = (2*k - 1) * y[2*k - 2] / (2*k)
```

```
        y[2*k + 1] = 2*k * y[2*k - 1] / (2*k + 1)
```

```
    return y
```

Avant le tour d'indice k , les termes jusqu'à l'indice $2k-1$ ont été calculés. Les deux affectations calculent alors les indices $2k$ et $2k+1$. Le dernier tour est $k = m$, donc

$$I(m) \text{ renvoie la liste } [I_0, I_1, \dots, I_{2m+1}].$$

3. Deux estimations de puissances de cosinus.

a) L'identité $\cos x - 1 = -2 \sin^2(x/2)$ et l'équivalent $\sin v \sim v$ en 0 donnent

$$\frac{\cos x - 1}{-x^2/2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \longrightarrow 1.$$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \ln(1 + u)$ est dérivable en 0, avec valeur 0 et dérivée 1, donc $\ln(1 + u)/u \rightarrow 1$. Ainsi

$$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \quad \ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

b) Posons $x_n = n^{-1/4}$ et $u_n = \cos x_n - 1$ pour $n \geq 1$. On a $0 < x_n \leq 1 < \pi/2$, donc $\cos x_n > 0$ et le logarithme est bien défini. Puisque $x_n \rightarrow 0$, la question précédente donne

$$\frac{n \ln(\cos x_n)}{-\sqrt{n}/2} = \frac{\ln(1 + u_n)}{u_n} \frac{u_n}{-x_n^2/2} \longrightarrow 1.$$

On obtient donc

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

En particulier, ce logarithme multiplié par n tend vers $-\infty$. En prenant l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n = 0.$$

c) Avec $z_n = n^{-2/3}$, le même produit de quotients donne

$$n \ln(\cos z_n) \sim -\frac{1}{2}nz_n^2 = -\frac{1}{2}n^{-1/3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1.$$

4. Limite de I_n .

a) Pour $n \geq 1$, $n^{-1/4} \leq 1 < \pi/2$ et, sur le segment $[0, n^{-1/4}]$, $0 \leq (\cos t)^n \leq 1$. Par intégration,

$$0 \leq \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

b) Le cosinus est décroissant et positif sur $[0, \pi/2]$. Pour $n^{-1/4} \leq t \leq \pi/2$,

$$0 \leq (\cos t)^n \leq (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt &\leq \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \right) (\cos(n^{-1/4}))^n \\ &\leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

c) En additionnant les deux bornes,

$$0 \leq I_n \leq n^{-1/4} + \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

Le premier terme tend vers 0, et le second aussi d'après 3.b. Le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

5. Divergence de la série de terme général I_n et sommes partielles.

a) Pour $n \geq 1$, $n^{-2/3} \leq 1 < \pi/2$. La positivité de l'intégrande donne

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt.$$

Sur ce dernier segment, le cosinus est supérieur ou égal à $\cos(n^{-2/3}) \geq 0$. Donc

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

D'après 3.c, le facteur $(\cos(n^{-2/3}))^n$ tend vers 1. Il existe donc N tel que, pour $n \geq N$,

$$I_n \geq \frac{1}{2n^{2/3}}.$$

La série de Riemann $\sum n^{-2/3}$ diverge puisque $2/3 \leq 1$. Par comparaison entre séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 0} I_n \text{ diverge, et ses sommes partielles tendent vers } +\infty.$$

b) En utilisant la fonction de 2.d, on peut écrire :

```
def sommeI(n):
    y = I(n + 1)
    s = 0.0
    for k in range(n + 1):
        s = s + y[k]
    return s
```

L'argument $n + 1$ de I est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la liste renvoyée contient tous les termes d'indices 0 à n . La boucle additionne exactement ces termes ; elle fonctionne aussi pour $n = 0$. Ainsi

$$\text{sommeI}(n) \text{ renvoie } S_n = \sum_{k=0}^n I_k.$$

6. Somme de la série alternée.

a) Si $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(t/2) \neq 0$. L'identité $1 + \tan^2(t/2) = 1/\cos^2(t/2)$ et la formule de l'angle double donnent

$$1 + \cos t = 2 \cos^2(t/2) = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}.$$

- b) Sur le segment $[0, \pi/2]$, la fonction $t \mapsto u = \tan(t/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\frac{1}{2}(1 + \tan^2(t/2)) > 0$. Elle est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et sa réciproque $t = 2 \arctan u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $dt = 2 du/(1 + u^2)$. La formule de 6.a reste valable en $t = \pi/2$ par continuité, et le changement de variable dans l'intégrale sur ce segment donne

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = \int_0^1 \frac{1 + u^2}{2} \frac{2 du}{1 + u^2} = \int_0^1 du.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = 1.}$$

- c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi/2]$, la formule de la somme *finie* géométrique, dont le dénominateur $1 + \cos t$ est non nul, donne

$$\sum_{k=0}^n (-\cos t)^k = \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}.$$

Par linéarité de l'intégrale pour cette somme finie,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-\cos t)^k dt.$$

On obtient ainsi l'identité demandée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt.}$$

- d) Sur $[0, \pi/2]$, $\cos t \geq 0$ et $1 + \cos t \geq 1$. L'inégalité triangulaire pour les intégrales donne alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \right| &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} dt = I_{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \right| \leq I_{n+1}.}$$

- e) Puisque $I_{n+1} \rightarrow 0$, le reste de 6.c tend vers 0 par 6.d. Les sommes partielles alternées tendent donc vers l'intégrale calculée en 6.b, égale à 1. Plus précisément,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k = 1, \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - 1 \right| \leq I_{n+1}.}$$

Cette série n'est pas absolument convergente, puisque la série de ses valeurs absolues est $\sum I_k$, divergente d'après la question 5.a.

Exercice 2 – Symétrie des coordonnées

La matrice S renverse l'ordre des coordonnées : ses coefficients valent $s_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$, et 0 sinon. On note F l'ensemble des colonnes symétriques, vérifiant $x_i = x_{n+1-i}$, et G celui des colonnes antisymétriques, vérifiant $x_i = -x_{n+1-i}$.

Corrigé – Exercice 2 – Symétrie des coordonnées.**Partie A – Cas $n = 3$.****1. Carré et valeurs propres de S .**

Le produit matriciel donne

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_3.$$

Si $SX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $X = S^2X = \lambda^2 X$, donc $\lambda^2 = 1$. Les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 . Elles sont effectivement atteintes : $S^t(1, 0, 1) = {}^t(1, 0, 1)$ et $S^t(1, 0, -1) = -{}^t(1, 0, -1)$. Ainsi

$$S^2 = I_3, \quad \text{Sp}(S) = \{-1, 1\}.$$

2. Bases de F et G .

La condition de symétrie est $x_1 = x_3$. Tout élément de F s'écrit donc

$${}^t(a, b, a) = a{}^t(1, 0, 1) + b{}^t(0, 1, 0).$$

Ces deux colonnes sont indépendantes, puisque leurs première et deuxième coordonnées imposent la nullité des coefficients d'une relation. La condition d'antisymétrie est $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -x_2$, soit $x_2 = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}({}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 1, 0)), & \dim F &= 2, \\ G &= \text{Vect}({}^t(1, 0, -1)), & \dim G &= 1. \end{aligned}$$

Les familles affichées sont des bases. Comme $S^t(a, b, c) = {}^t(c, b, a)$, l'égalité $SX = X$ équivaut à $X \in F$, et $SX = -X$ à $X \in G$. Donc

$$F = E_1(S), \quad G = E_{-1}(S).$$

3. Somme directe des deux sous-espaces.

Un vecteur appartenant à $F \cap G$ satisfait à la fois $SX = X$ et $SX = -X$, donc $2X = 0$ et $X = 0$. Les dimensions s'ajoutent alors : $\dim(F + G) = 2 + 1 = 3$. Ainsi $F + G$ est tout l'espace de dimension 3, et

$$F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Corrigé – Exercice 2 – Partie B : cas général.**Cas général** $n \geq 2$.**4. Propriétés de la matrice S .**

a) La matrice est

$$S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus précisément, les seuls coefficients non nuls sont ceux de l'antidiagonale, tous égaux à 1. La condition $i + j = n + 1$ est symétrique en i, j , donc $s_{i,j} = s_{j,i}$. Ainsi S est réelle symétrique. Le théorème spectral donne

$$\boxed{{}^tS = S, \quad S \text{ est diagonalisable dans une base orthonormale.}}$$

b) Chaque ligne possède un seul coefficient non nul, à la colonne $n + 1 - i$. Le produit donne donc

$$\boxed{X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \implies SX = {}^t(x_n, \dots, x_1).}$$

c) Le coefficient de S^2 à la ligne i et à la colonne j vaut

$$(S^2)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n s_{i,\ell} s_{\ell,j}.$$

Dans cette somme, seul l'indice $\ell = n + 1 - i$ peut contribuer, et son premier facteur vaut 1. Ainsi

$$(S^2)_{i,j} = s_{n+1-i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n + 1 - i = n + 1 - j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il vaut donc 1 si $i = j$, et 0 sinon. Par conséquent,

$$\boxed{S^2 = I_n.}$$

5. Décomposition et sous-espaces propres.a) Pour toute colonne X , posons

$$Y = \frac{X + SX}{2}, \quad Z = \frac{X - SX}{2}.$$

On a $Y + Z = X$. Comme $S^2 = I_n$,

$$SY = \frac{SX + X}{2} = Y, \quad SZ = \frac{SX - X}{2} = -Z.$$

Le renversement des coordonnées de la question 4.b) montre donc $Y \in F$ et $Z \in G$. L'intersection de F et de G est réduite à $\{0\}$: une colonne Y appartenant vérifie $SX = X = -SX$, donc $X = 0$. Si $X = Y' + Z'$ est une autre décomposition, alors $Y - Y' = Z' - Z \in F \cap G$, ce qui impose $Y = Y'$ et $Z = Z'$. Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} \exists! (Y, Z) \in F \times G, \quad X &= Y + Z, \\ Y &= (X + SX)/2, \quad Z = (X - SX)/2. \end{aligned}}$$

- b) Le résultat 4.b) donne $SX = X \iff X \in F$ et $SX = -X \iff X \in G$. Ces ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels, puisque ce sont les noyaux de $S - I_n$ et de $S + I_n$. Ils contiennent respectivement $e_1 + e_n \neq 0$ et $e_1 - e_n \neq 0$, car $n \geq 2$. Les valeurs $1, -1$ sont ainsi bien des valeurs propres, et $S^2 = I_n$ exclut toute autre valeur propre par le calcul de la question 1. Donc

$$F = E_1(S), \quad G = E_{-1}(S), \quad \text{Sp}(S) = \{-1, 1\}.$$

La décomposition de a) établit également $F \oplus G = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Sous-espaces propres d'une matrice qui commute avec S .

- a) Les coefficients des deux produits sont

$$(AS)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} s_{\ell,j} = a_{i,n+1-j}, \quad (SA)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n s_{i,\ell} a_{\ell,j} = a_{n+1-i,j}.$$

Ils sont égaux par l'hypothèse sur A , donc $AS = SA$.

- b) Puisque $AX = \lambda X$,

$$A(SX) = S(AX) = S(\lambda X) = \lambda SX.$$

De plus, $SX \neq 0$: sinon $X = S^2 X = 0$, ce qui contredit le choix d'un vecteur propre. Ainsi

$$SX \text{ est un vecteur propre de } A \text{ de valeur propre } \lambda.$$

- c) Pour $Y = X + SX$, la linéarité et b) donnent

$$AY = AX + A(SX) = \lambda X + \lambda SX = \lambda Y.$$

Cette égalité reste vraie si $Y = 0$.

- d) On a $SY = SX + S^2 X = Y$, donc $Y \in F$. Si $Y \neq 0$, il appartient aussi à $E_\lambda(A)$ d'après c), et fournit le vecteur symétrique demandé. Si $Y = 0$, alors $SX = -X$. Le vecteur propre initial $X \neq 0$ est donc antisymétrique et appartient à $G \cap E_\lambda(A)$. Dans tous les cas,

$$E_\lambda(A) \text{ contient un vecteur non nul symétrique ou antisymétrique.}$$

Problème – Partie A : lois des premières variables

Après k tirages, l'urne contient $k + 2$ boules. La variable X_k compte ses boules blanches ; les $k + 2 - X_k$ autres sont noires. Une boule blanche tirée conduit à ajouter une boule noire ; une boule noire tirée conduit à ajouter une boule blanche. On a $X_0 = 1$.

Méthode. On conditionne par le nombre de boules blanches avant un tirage. La formule des probabilités totales donne ensuite une récurrence permettant de calculer les lois successives.

Corrigé – Problème – Partie A : lois des premières variables.**1. Loi, espérance et variance de X_1 .**

Au premier tirage, chacune des deux couleurs a une probabilité $1/2$. Si la boule tirée est blanche, on ajoute une noire et $X_1 = 1$. Si elle est noire, on ajoute une blanche et $X_1 = 2$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Les moments se calculent par des sommes finies :

$$\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{E}(X_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2. Loi de X_2 .

Les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_1 = 2]$ forment un système complet d'événements, chacun de probabilité $1/2$. Après le premier tirage, l'urne contient trois boules.

Conditionnellement à $[X_1 = 1]$, elle contient une blanche et deux noires. On a donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) = \frac{2}{3}.$$

Conditionnellement à $[X_1 = 2]$, elle contient deux blanches et une noire, d'où

$$\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Les autres transitions ont une probabilité nulle. La formule des probabilités totales, appliquée au système complet précisé ci-dessus, donne alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(X_2 = 2) &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{P}(X_2 = 3) &= 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi

i	1	2	3
$\mathbb{P}(X_2 = i)$	1/6	2/3	1/6

3. Valeurs possibles de X_k .

À chaque tirage, le nombre de boules blanches augmente de 0 ou de 1. Partant de $X_0 = 1$, on obtient donc $1 \leq X_k \leq k + 1$.

Réciproquement, fixons $i \in \{1, \dots, k + 1\}$. Considérons l'événement constitué de $i - 1$ tirages noirs suivis de $k - i + 1$ tirages blancs. Chacun de ces tirages a une probabilité conditionnelle strictement positive : les deux couleurs restent présentes dans l'urne, puisqu'on remet toujours la boule tirée. Le produit fini de ces probabilités est donc strictement positif. Sur cet événement, on ajoute exactement $i - 1$ boules blanches et $X_k = i$.

Cela prouve que toutes les valeurs annoncées sont effectivement possibles et de probabilité strictement positive. Pour $k = 0$, la même conclusion résulte de $X_0 = 1$. Ainsi

$$X_k(\Omega) = \{1, \dots, k + 1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k + 1\}, \quad \mathbb{P}(X_k = i) > 0.$$

4. Probabilités conditionnelles d'un tirage.

Sur l'événement $[X_k = j]$, l'urne contient j boules blanches et $k + 2 - j$ boules noires. Tirer une blanche laisse le nombre de blanches égal à j ; tirer une noire le fait passer à $j + 1$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j) = \begin{cases} \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j, \\ \frac{k+2-j}{k+2} & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces probabilités conditionnelles sont bien définies grâce à la positivité établie à la question précédente.

5. Récurrence sur les lois.

Pour tout $k \geq 0$, les événements $([X_k = j])_{1 \leq j \leq k+1}$ forment un système complet d'événements de probabilités strictement positives. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j) \mathbb{P}(X_k = j).$$

Seuls les termes $j = i$ et $j = i - 1$ peuvent être non nuls. En convenant que $\mathbb{P}(X_k = j) = 0$ lorsque $j \notin \{1, \dots, k + 1\}$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i - 1). \quad (*)$$

Pour $i = 1$, le second terme est nul. Pour $i = k + 2$, le premier terme est nul. Enfin, pour $i > k + 2$, les deux probabilités du membre de droite et celle du membre de gauche sont nulles. La formule est donc valable pour tout entier $i \geq 1$.

6. Loi de X_3 .

Le support de X_3 est $\{1, 2, 3, 4\}$. En appliquant (*) avec $k = 2$ à la loi de X_2 , on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 1) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}, \\ \mathbb{P}(X_3 = 2) &= \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}, \\ \mathbb{P}(X_3 = 3) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}, \\ \mathbb{P}(X_3 = 4) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Ainsi

i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_3 = i)$	1/24	11/24	11/24	1/24

7. Probabilités des valeurs extrêmes et de la valeur 2.

a) Avec $i = 1$, la récurrence (*) devient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Or $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 = 1/1!$. Si $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1/(k+1)!$, alors

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

b) Avec $i = k+2$, on sait que $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$, et (*) donne

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = k+1).$$

L'initialisation $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$ et la même récurrence que précédemment entraînent

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

On peut aussi interpréter cet événement : le nombre de blanches atteint $k+1$ exactement lorsque les k boules tirées sont toutes noires. Il reste alors une seule boule noire tout au long de l'expérience.

c) Avec $i = 2$, la récurrence (*) donne

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = \frac{2}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1).$$

En multipliant par $(k+2)!$ et en utilisant la question (a), on obtient

$$\boxed{a_{k+1} = 2a_k + k + 1, \quad a_0 = 0.}$$

Pour $b_k = a_k + k + 2$, il vient

$$b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2a_k + k + 1 + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k.$$

Ainsi (b_k) est géométrique de raison 2. Comme $b_0 = 2$, on a $b_k = 2^{k+1}$, puis $a_k = 2^{k+1} - k - 2$. Finalement,

$$\forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

La formule donne bien 0 pour $k = 0$, puisque $X_0 = 1$.

Problème – Partie B : simulations et lois théoriques

Méthode. Une simulation suit l'évolution des deux nombres de boules. Pour calculer une loi théorique, on applique au contraire la récurrence (*) à un tableau de probabilités. On importe `numpy.random` sous le nom `rd` ; pour `rd.randint`, la borne inférieure est incluse et la borne supérieure est exclue.

Corrigé – Problème – Partie B : simulations et lois théoriques.**8. Interprétation de mystere.**

Les variables `n` et `b` désignent respectivement le nombre de boules noires et de boules blanches. Leur initialisation à 1 décrit l'urne de départ. À chaque passage dans la boucle, on numérote les boules noires de 1 à `n`, puis les blanches de `n+1` à `n+b`.

La ligne `r = rd.randint(1, n + b + 1)` tire uniformément un entier parmi les `n+b` numéros. La borne supérieure `n+b+1` étant exclue, les valeurs possibles sont exactement `1, ..., n+b` : le dernier numéro `n+b` est donc inclus. Cette instruction simule un tirage uniforme d'une boule dans l'urne : la probabilité de `r > n` est `b/(n+b)`, et celle de `r <= n` est `n/(n+b)`.

Si `r > n`, la boule tirée est blanche et l'instruction `n = n + 1` ajoute une noire. Sinon, la boule tirée est noire et `b = b + 1` ajoute une blanche. Les variables continuent donc de décrire exactement la composition de l'urne après chaque tirage. Après les k passages dans la boucle,

`mystere(k)` renvoie une réalisation de X_k .

On utilise le programme de l'énoncé avec l'import suivant :

```
import numpy.random as rd

def mystere(k):
    n = 1
    b = 1
    for _ in range(k):
        r = rd.randint(1, n + b + 1)
        if r > n:
            n = n + 1
        else:
            b = b + 1
    return b
```

9. Estimation de la loi par fréquences.

Pour $k \geq 1$ et $N \geq 1$, on initialise une liste de $k + 1$ compteurs. Chaque appel à `mystere(k)` simule une nouvelle expérience ; si son résultat est i , on augmente le compteur d'indice $i - 1$. On divise ensuite les compteurs par N :

```
def loi_exp(k, N):
    LE = [0.0] * (k + 1)
    for _ in range(N):
        i = mystere(k)
        LE[i - 1] = LE[i - 1] + 1
    for i in range(k + 1):
        LE[i] = LE[i] / N
    return LE
```

Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \dots, k+1\}$,

$$\text{LE}[i-1] = \frac{\text{nombre de simulations dont le résultat est } i}{N}.$$

La somme des fréquences est 1, puisque chacune des N simulations augmente exactement un compteur.

10. Calcul de la loi théorique.

Pour interpréter les indices, on pose

$$M[k][i] = \mathbb{P}(X_{k+1} = i+1) \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

La première ligne donne donc la loi de X_1 . Au début du passage d'indice $k \geq 1$, la ligne précédente contient la loi de X_k . La formule (*) appliquée à la valeur $i+1$ s'écrit

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i+1) = \frac{i+1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i+1) + \frac{k+2-i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i).$$

Cela donne les coefficients intérieurs. Aux extrémités du support, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1), \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = k+1).$$

Les cases initialisées à 0 qui sont hors du support de la ligne précédente restent nulles. La case $M[k-1][k]$ représente sa dernière valeur possible, $\mathbb{P}(X_k = k+1)$. Le programme complété est

```
def loi_theo(n):
    M = [[0.0] * (n + 1) for _ in range(n + 1)]
    M[0][0] = 1 / 2
    M[0][1] = 1 / 2
    for k in range(1, n):
        M[k][0] = M[k-1][0] / (k + 2)
        for i in range(1, k + 1):
            M[k][i] = ((i + 1) * M[k-1][i]
                       + (k + 2 - i) * M[k-1][i-1]) / (k + 2)
        M[k][k+1] = M[k-1][k] / (k + 2)
    LT = M[n-1]
    return LT
```

Une récurrence sur les lignes, initialisée par la loi de X_1 , justifie que toutes les valeurs calculées sont les probabilités annoncées. La ligne d'indice $n-1$ contient la loi de X_n , et possède exactement $n+1$ coefficients :

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \quad \text{LT}[i-1] = \mathbb{P}(X_n = i).$$

Pour $n = 1$, la boucle est vide et le programme renvoie directement $[1/2, 1/2]$, comme attendu.

11. Origine des valeurs proposées pour X_5 .

D'après la question 7, la loi théorique vérifie nécessairement

$$\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_5 = 6) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \simeq 0,001388889.$$

Les valeurs proposées pour ces deux probabilités, 0,001368 et 0,00138, ne correspondent pas à cette valeur. En appliquant successivement la récurrence (*), on obtient d'ailleurs la loi exacte

$$(\mathbb{P}(X_5 = i))_{1 \leq i \leq 6} = \frac{1}{720}(1, 57, 302, 302, 57, 1).$$

Les écarts observés correspondent aux fluctuations des fréquences de simulation autour des probabilités théoriques. On conclut que

l'étudiant a utilisé la fonction `loi_exp`.

Problème – Partie C : espérance et convergence

Après k tirages, l'urne contient $k + 2$ boules, dont X_k blanches. On rappelle $X_0 = 1$ et la relation établie en partie A, valable pour $k \geq 0$ et $i \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i-1). \quad (*)$$

Les probabilités des valeurs hors de $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$ sont nulles. On calcule l'espérance, puis on étudie la proportion de boules blanches.

Corrigé – Problème – Partie C : espérance et convergence.**12. Espérance du nombre de boules blanches.**

- a) Posons $p_k(i) = \mathbb{P}(X_k = i)$, avec $p_k(i) = 0$ hors de $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$. En multipliant (*) par i puis en sommant sur les valeurs de X_{k+1} , on obtient

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{1}{k+2} \left(\sum_{i=1}^{k+2} i^2 p_k(i) + \sum_{i=1}^{k+2} i(k+3-i) p_k(i-1) \right).$$

Dans la seconde somme, posons $j = i - 1$. On utilise $p_k(0) = p_k(k+2) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{1}{k+2} \sum_{j=1}^{k+1} (j^2 + (j+1)(k+2-j)) p_k(j).$$

Or $j^2 + (j+1)(k+2-j) = (k+1)j + k+2$, et $\sum_{j=1}^{k+1} p_k(j) = 1$. Par conséquent,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \mathbb{E}(X_k) + 1.$$

- b) Au rang 0, $\mathbb{E}(X_0) = 1 = (0+2)/2$. Supposons $\mathbb{E}(X_k) = (k+2)/2$ pour un certain $k \geq 0$. La relation de a) donne

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}.$$

La propriété se transmet donc au rang suivant. Par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

- c) La variable X_k compte les boules blanches après k tirages, puisque le $(k+1)$ -ième tirage n'a pas encore eu lieu. Ainsi

$$X_k + Y_k = k + 2.$$

Pour justifier la symétrie des lois, considérons les suites de k couleurs tirées. Échanger « blanche » et « noire » dans toute une suite définit une bijection de l'ensemble de ces suites. L'urne initiale contient une boule de chaque couleur. À chaque étape, échanger les couleurs échange les nombres de boules de chaque couleur et conserve le nombre total ; ajouter une boule de couleur opposée est également compatible avec cet échange. La probabilité conditionnelle de tirer une couleur dans une suite est donc égale à celle de tirer la couleur échangée dans la suite correspondante. En

multipliant ces probabilités au fil des k tirages, on obtient la même probabilité pour les deux suites. Enfin, le nombre de boules blanches à l'issue de la suite échangée est le nombre de boules noires à l'issue de la suite initiale. La bijection, qui conserve les probabilités, montre donc que X_k et Y_k ont la même loi, puis la même espérance. En prenant l'espérance dans leur somme,

$$2\mathbb{E}(X_k) = k + 2.$$

On retrouve ainsi

$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k) = \frac{k+2}{2}.$$

13. Convergence de la proportion de boules blanches.

a) Pour $k \geq 1$, posons $Z_k = X_k/(k+2)$. D'après la question 12 et la variance admise,

$$\mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{V}(Z_k) = \frac{1}{(k+2)^2} \frac{k+2}{12} = \frac{1}{12(k+2)}.$$

Pour $\alpha > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P}\left(\left|Z_k - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{12\alpha^2(k+2)}.$$

L'événement complémentaire est bien celui défini avec l'inégalité stricte $< \alpha$. Ainsi

$$1 - \frac{1}{12\alpha^2(k+2)} \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) \leq 1.$$

Par encadrement,

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

b) Le quotient $X_k/(k+2)$ est la proportion de boules blanches après k tirages. Le résultat précédent signifie que cette proportion converge en probabilité vers $1/2$: pour toute tolérance fixée, la probabilité de s'écarter de $1/2$ de moins de cette tolérance tend vers 1. Intuitivement, si les boules blanches sont majoritaires, on tire plus souvent une boule blanche, ce qui entraîne l'ajout d'une boule noire. L'évolution tend ainsi à réduire le déséquilibre. Le même raisonnement s'applique lorsque les boules noires sont majoritaires. La variance du nombre de boules blanches est de l'ordre de k , tandis que le carré du nombre total est de l'ordre de k^2 : la variance de la proportion tend donc vers 0.

$$\frac{X_k}{k+2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

Problème – Partie D : automorphismes de polynômes

Pour $1 \leq j < i$, on considère $\varphi_{i,j}(P) = jP(X+1) - iP(X)$. On établit sa bijectivité sur $\mathbb{R}[X]$. Les polynômes définis à partir de ces applications permettront de donner une formule pour la loi de X_k .

Corrigé – Problème – Partie D : automorphismes de polynômes.

14. L'application $\varphi_{i,j}$.

a) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(aP + bQ) &= j(aP(X+1) + bQ(X+1)) - i(aP(X) + bQ(X)) \\ &= a\varphi_{i,j}(P) + b\varphi_{i,j}(Q).\end{aligned}$$

Les images sont des polynômes. Ainsi

$$\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est linéaire.}}$$

b) Soit P non nul, de degré $d \geq 0$ et de coefficient dominant $c \neq 0$. Le polynôme $P(X+1)$ a également pour degré d et pour coefficient dominant c . Le coefficient de X^d dans $\varphi_{i,j}(P)$ est donc $(j-i)c$, qui est non nul puisque $j < i$. Ainsi

$$\boxed{\forall P \neq 0, \quad \deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg P.}$$

Pour le polynôme nul, on a simplement $\varphi_{i,j}(0) = 0$.

c) Si $P \neq 0$, la question b) montre que $\varphi_{i,j}(P) \neq 0$. Le noyau de cette application linéaire est donc réduit au polynôme nul. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est injective.}}$$

d) Le polynôme nul a pour antécédent 0. Soit maintenant $P \neq 0$ et $n = \deg P$. La question b) montre que $\varphi_{i,j}$ envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Sa restriction à cet espace est donc un endomorphisme injectif. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$; cet endomorphisme injectif est donc surjectif. Il existe ainsi $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$. On a obtenu un antécédent pour tout polynôme, et l'injectivité assure son unicité. Ainsi

$$\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

15. Calcul de quelques polynômes $P_{i,j}$.

On rappelle les définitions

$$\begin{aligned}P_{1,1} &= 1, \\ \varphi_{i,j}(P_{i,j}) &= (3+X-i)P_{i-1,j} \quad (j < i), \\ P_{i,i} &= -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) \quad (i > 1).\end{aligned}$$

Le dernier polynôme est constant.

a) Pour $i = 2$ et $j = 1$, le polynôme proposé vérifie

$$\varphi_{2,1}(-X-2) = (-X-3) - 2(-X-2) = X+1 = (3+X-2)P_{1,1}(X).$$

L'unicité de l'antécédent par $\varphi_{2,1}$ donne $P_{2,1} = -X - 2$. Ensuite, $P_{2,2} = -P_{2,1}(0) = 2$.
Ainsi

$$P_{2,1}(X) = -X - 2, \quad P_{2,2}(X) = 2.$$

b) Pour $i = 3$ et $j = 2$, on a $(3 + X - i)P_{2,2}(X) = 2X$. Or

$$\varphi_{3,2}(-2X - 4) = 2(-2X - 6) - 3(-2X - 4) = 2X.$$

L'unicité de l'antécédent donne

$$P_{3,2}(X) = -2X - 4.$$

Les deux autres polynômes fournis dans l'énoncé sont

$$P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1, \quad P_{3,3}(X) = 3.$$

Ils sont cohérents avec les définitions : $\varphi_{3,1}(P_{3,1}) = -X^2 - 2X = X P_{2,1}$ et $-P_{3,1}(0) - P_{3,2}(0) = -1 + 4 = 3$.

Problème – Partie D : formule pour la loi

Pour $i \geq 1$, on cherche à établir, pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

On utilise la relation (*) et les identités polynomiales démontrées ci-dessus.

Corrigé – Problème – Partie D : formule pour la loi.**16. Démonstration de la propriété $\mathcal{H}_i$.**

- a) Comme $X_0 = 1$, on a $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$. En prenant $i = 1$ dans (*), et en utilisant $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Par récurrence sur k , $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1/(k+1)!$ pour tout $k \geq 0$. Comme $P_{1,1}(k)1^k = 1$, cela donne

$$\boxed{\mathcal{H}_1 \text{ est vraie.}}$$

- b) Fixons $i > 1$ et supposons $\mathcal{H}_{i-1}$ vraie pour *tout* $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$S_k = (k+1)! \mathbb{P}(X_k = i), \quad T_k = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k, \quad a_k = S_k - T_k.$$

La relation (*), multipliée par $(k+2)!$, donne

$$S_{k+1} = iS_k + (k+3-i)(k+1)! \mathbb{P}(X_k = i-1).$$

L'hypothèse de récurrence donne

$$(k+1)! \mathbb{P}(X_k = i-1) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k) j^k.$$

D'autre part, en évaluant l'identité définissant $P_{i,j}$ en $X = k$, on a

$$jP_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k) = (k+3-i)P_{i-1,j}(k).$$

On multiplie cette égalité par j^k et on somme sur $1 \leq j \leq i-1$:

$$T_{k+1} = iT_k + (k+3-i) \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k) j^k.$$

En soustrayant les deux récurrences,

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad a_{k+1} = ia_k.}$$

La suite est donc géométrique de raison i . Pour calculer son premier terme, on utilise $X_0 = 1$ et $i > 1$: $\mathbb{P}(X_0 = i) = 0$. Comme $j^0 = 1$ pour chaque $j \geq 1$,

$$a_0 = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i}.$$

Le polynôme $P_{i,i}$ étant constant, on en déduit

$$a_0 = P_{i,i}, \quad a_k = P_{i,i} i^k = P_{i,i}(k) i^k.$$

La relation $S_k = T_k + a_k$ devient donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

Ainsi $\mathcal{H}_i$ est vraie.

c) L'initialisation et l'hérédité établissent la propriété pour tout entier $i \geq 1$:

$$\forall i \geq 1, \forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

La formule inclut les rangs où i est hors des valeurs possibles de X_k ; la somme y est alors nulle.

17. Probabilités explicites pour deux et trois boules blanches.

a) Pour $i = 2$, la formule de la question 16 et les polynômes de 15.a) donnent, pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{P_{2,1}(k)1^k + P_{2,2}(k)2^k}{(k+1)!} = \frac{-k-2+2 \cdot 2^k}{(k+1)!}.$$

On retrouve donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

b) Pour $i = 3$, en utilisant les trois polynômes de la question 15,

$$\mathbb{P}(X_k = 3) = \frac{\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 - (2k+4)2^k + 3 \cdot 3^k}{(k+1)!}.$$

Comme $\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 = (k+1)(k+2)/2$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{N}^*, \\ \mathbb{P}(X_k = 3) &= \frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2) - (k+2)2^{k+1} + 3^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

En particulier, le numérateur est nul pour $k = 1$, ce qui est conforme à $X_1 \in \{1, 2\}$.