

Ecricome

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2019

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; intégrales généralisées ; séries ;</i>	
<i>Python.</i>	2
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	
	3
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables ; applications linéaires ;</i>	
<i>Python.</i>	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; intégrales généralisées ; séries ; Python.

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$. En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge.
(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1}).$$

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- (d) Compléter la fonction Python suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif m , afin qu'elle renvoie une liste y contenant les $2m+2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

```
import math

def I(m):
    y = [0.0] * (2*m + 2)
    y[0] = ...
    y[1] = ...
    for k in range(1, m + 1):
        ...
    return y
```

3. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et de $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.
(b) Montrer que

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt{n}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$.

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1$.
4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

En déduire la nature de la série de terme général I_n .

- (b) Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie le terme de rang n de la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{k \geq 0} I_k$.
6. (a) Montrer que, pour tout réel $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}.$$

- (b) À l'aide du changement de variable $u = \tan(t/2)$, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1.$$

- (c) Montrer que, pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

- (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

- (e) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.

2 Exercice 2

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dit *symétrique* (respectivement *antisymétrique*) lorsque

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = x_{n+1-i} \quad (\text{respectivement } x_i = -x_{n+1-i}).$$

On note F l'ensemble des vecteurs symétriques et G l'ensemble des vecteurs antisymétriques de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $S = (s_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie A. Dans cette partie uniquement, on étudie le cas particulier $n = 3$, pour lequel

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer S^2 . En déduire les valeurs propres de S .
- Déterminer une base de F et une base de G . Vérifier que F et G sont des sous-espaces propres de S .
- En déduire que $F \oplus G = M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Partie B. On revient au cas général, où $n \geq 2$.

4. (a) Expliciter S et justifier que S est diagonalisable.
 (b) Calculer SX lorsque $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$.
 (c) Pour i et j dans $\{1, \dots, n\}$, expliciter le coefficient en ligne i et colonne j de S^2 en fonction des coefficients $s_{i,\ell}$ de S . En déduire que S^2 est la matrice identité d'ordre n .
5. (a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Y, Z) de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y \in F$, $Z \in G$ et $X = Y + Z$.
 (b) Montrer que F et G sont les sous-espaces propres de S . Préciser les valeurs propres associées.
6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}.$$

On considère λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

- (a) Vérifier que $AS = SA$.
- (b) Montrer que SX est un vecteur propre de A .
- (c) Posant $Y = X + SX$, exprimer AY en fonction de Y et de X .
- (d) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ contient nécessairement un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.

3 Problème

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables ; applications linéaires ; Python.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose cette expérience modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$ -ième tirage. En particulier, $X_0 = 1$.

Partie A.

1. Déterminer la loi de X_1 . Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}.$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k .
4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$. On distinguera les différents cas selon les valeurs relatives de i et j .
5. Déduire de ce qui précède que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i-1). \quad (*)$$

6. À l'aide de la formule (*), déterminer la loi de X_3 .
7. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.
- (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k = k + 1)$.
- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, poser $a_k = (k + 1)! \mathbb{P}(X_k = 2)$. Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k . Montrer que la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par $b_k = a_k + k + 2$ est géométrique. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k + 1)!}.$$

Partie B.

8. Que renvoie la fonction Python suivante pour un entier k non nul ? Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
def mystere(k):
    n = 1
    b = 1
    for _ in range(k):
        r = randint(1, n + b)
        if r > n:
            n = n + 1
        else:
            b = b + 1
    return b
```

9. Écrire une fonction Python d'en-tête `loi_exp(k, N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N , effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne, et renvoie une liste `LE` contenant une estimation de la loi de X_k : pour chaque $i \in \{1, \dots, k + 1\}$, `LE[i-1]` contient la fréquence de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations. On pourra utiliser la fonction `mystere`.
10. Recopier et compléter la fonction Python suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n , afin qu'elle renvoie une liste `LT` contenant la loi théorique de X_n .

```
def loi_theo(n):
    M = [[0.0] * (n + 1) for _ in range(n + 1)]
    M[0][0] = 1 / 2
    M[0][1] = 1 / 2
    for k in range(1, n):
        M[k][0] = ...
        for i in range(1, k + 1):
            M[k][i] = ...
        M[k][k + 1] = ...
    LT = ...
    return LT
```

11. Un étudiant propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X_5 = k)$	0,001368	0,079365	0,419434	0,418999	0,079454	0,00138

A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C.

12. (a) À l'aide de la formule (*), montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \mathbb{E}(X_k) + 1$.
- (b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}$.
- (c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages. Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat précédent.

On admettra pour la suite que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{V}(X_k) = \frac{k+2}{12}$.

13. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1.$$

- (b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D. Pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par

$$\varphi_{i,j} : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \longmapsto jP(X+1) - iP(X).$$

14. (a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.
- (b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.
- (c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.
- (d) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$. Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$, où n est le degré de P .

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$, pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq j \leq i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}((3+X-i)P_{i-1,j}(X)) \quad (1 \leq j < i),$$

et, pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(X) = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15. (a) Vérifier que $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$.
- (b) Vérifier que $P_{3,2}(X) = -2X - 4$. On admettra dans la suite que

$$P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1 \quad \text{et} \quad P_{3,3}(X) = 3.$$

16. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$$\mathcal{H}_i : \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$ est vraie.

- (a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- (b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et l'on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = (k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k.$$

En utilisant la formule (*) et la relation $(3+X-i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))$, montrer que la suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est géométrique. Déterminer a_0 et en déduire que $\mathcal{H}_i$ est vraie.

- (c) Conclure.

17. (a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le résultat de la question 7(c).
 (b) Déterminer $\mathbb{P}(X_k = 3)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.