EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2019

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Exercice 1 – Décomposition sur les sous-espaces propres

On étudie d'abord l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis on construit, par interpolation polynomiale, la décomposition d'un vecteur sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable.

Corrigé – Exercice 1 – Décomposition sur les sous-espaces propres.

Partie I – Étude d'un exemple

1. Polynôme annulateur et sous-espaces propres.

a) Le produit matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I_3.$$

Ainsi

$$\boxed{A^2 - 3A + 2I_3 = 0, \qquad P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \text{ annule } A.}$$

b) Si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur colonne $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$. Alors $A^2 v = \lambda^2 v$ et

$$0 = (A^2 - 3A + 2I_3)v = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)v.$$

Comme $v \neq 0$, $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Les deux seules valeurs propres possibles sont donc

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.}$$

c) Les rangs affichés suggèrent, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = 3 - 1 = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1$. Ces deux noyaux étant non réduits au vecteur nul, les deux valeurs candidates devraient effectivement être des valeurs propres. La conjecture est

$$\boxed{\operatorname{Sp}(f) = \{1, 2\}, \qquad \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 2, \qquad \dim \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = 1.}$$

Les calculs exacts suivants la démontrent.

d) Pour $x = (a, b, c)$, on a

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a + 2b - 2c \\ -a + b - c \end{pmatrix}.$$

Ainsi $f(x) = x$ équivaut à $b = a + c$, et

$$(a, b, c) = a(1, 1, 0) + c(0, 1, 1).$$

Les deux vecteurs affichés sont indépendants : la première puis la troisième coordonnée d'une relation linéaire imposent que ses deux coefficients soient nuls. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big), \quad \big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big) \text{ en est une base.}}$$

De même,

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a + b - 2c \\ -a + b - 2c \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est nul si et seulement si $a = 0$ et $b = 2c$. Il s'ensuit

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(0, 2, 1), \quad \big((0, 2, 1)\big) \text{ en est une base.}}$$

On confirme ainsi les valeurs propres et les dimensions de la question précédente.

2. Base propre et coordonnées.

a) On choisit les vecteurs à coordonnées entières naturelles

$$\boxed{u_1 = (1, 1, 0), \qquad v_1 = (0, 1, 1), \qquad v_2 = (0, 2, 1).}$$

Ils respectent les coordonnées nulles imposées. Pour un vecteur propre non nul de valeur propre 1 dont la dernière coordonnée est nulle, les autres coordonnées sont égales et leur plus petite valeur positive entière est 1 ; le même raisonnement s'applique à v_1 avec sa première coordonnée nulle. Pour v_2, les vecteurs à coordonnées entières naturelles sont $(0, 2c, c)$, et le plus petit choix non nul est $c = 1$.
Si $\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2 = 0$, les coordonnées donnent

$$\alpha = 0, \qquad \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \qquad \beta + \gamma = 0.$$

Les deux dernières égalités, avec $\alpha = 0$, entraînent $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$. Cette famille de trois vecteurs est donc libre dans $\mathbb{R}^3$, et constitue une base. Tous ses vecteurs sont propres, avec $f(u_1) = u_1$, $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = 2v_2$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{B} = (u_1, v_1, v_2) \text{ est une base propre}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1, 1, 2).}$$

En particulier, f est diagonalisable.

b) Écrire $x = (a, b, c) = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2$ revient à résoudre

$$\alpha = a, \qquad \alpha + \beta + 2\gamma = b, \qquad \beta + \gamma = c.$$

On en déduit $\gamma = b - a - c$, puis $\beta = a + 2c - b$. Par conséquent,

$$\boxed{[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ a+2c-b \\ b-a-c \end{pmatrix}, \qquad x = au_1 + (a+2c-b)v_1 + (b-a-c)v_2.}$$

La décomposition suivant les deux sous-espaces propres est donc

$$\boxed{\begin{aligned} &x = x_1 + x_2, \\ &x_1 = (a,\, 2a+2c-b,\, a+2c-b) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}), \\ &x_2 = (0,\, 2b-2a-2c,\, b-a-c) \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}). \end{aligned}}$$

Partie II – Généralisation

On suppose désormais f diagonalisable sur l'espace réel E de dimension n, avec les p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On note Id l'identité de E.

3. Un polynôme annulateur de f.

a) Écrivons $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Chaque d_j est une valeur propre de f : le j-ième vecteur de la base diagonalisante est un vecteur propre de valeur propre d_j. Ainsi chaque d_j est égal à l'un des λ_i. Les matrices $D - \lambda_i I_n$ sont diagonales, et leur produit est diagonal, de j-ième coefficient

$$\prod_{i=1}^{p} (d_j - \lambda_i) = 0,$$

puisque l'un des facteurs est nul. On obtient

$$\boxed{\prod_{i=1}^{p} (D - \lambda_i I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

b) La matrice de la composée $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id})$ dans cette même base est le produit précédent, donc la matrice nulle. La composée est donc l'endomorphisme nul. Autrement dit,

$$\boxed{Q(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i) \text{ annule } f, \qquad Q(f) = 0.}$$

4. Polynômes d'interpolation.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, les différences $\lambda_k - \lambda_j$, avec $j \neq k$, ne sont pas nulles. Le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

est ainsi bien défini et de degré $p - 1$.

a) Pour $i = k$, chacun des facteurs vaut 1. Pour $i \neq k$, le facteur d'indice $j = i$ a son numérateur nul. Il vient

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}}$$

b) Les p polynômes L_k appartiennent à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. Supposons $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k = 0$; l'évaluation en λ_i donne $\alpha_i = 0$ pour chaque i. La famille est donc libre. Puisque $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = p$, on conclut

$$\boxed{(L_1, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X].}$$

c) Il existe donc des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $P = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k$. En évaluant en λ_i, on obtient $P(\lambda_i) = \alpha_i$. Ainsi

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \qquad P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k.}$$

d) Le polynôme constant $P = 1$ appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et prend la valeur 1 en chacun des λ_i. La formule précédente donne

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1.}$$

5. Décomposition d'un vecteur sur les sous-espaces propres.

a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre de f, et notons $f(e_j) = d_j e_j$. Pour tout entier $m \geq 0$, une récurrence donne $f^m(e_j) = d_j^m e_j$, avec $f^0 = \mathrm{Id}$. Par linéarité, pour tout polynôme P, on a donc

$$P(f)(e_j) = P(d_j) e_j.$$

Pour $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, la question 4.a entraîne

$$L_k(f)(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j L_k(d_j) e_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d_j = \lambda_k}} x_j e_j.$$

Les vecteurs intervenant dans cette dernière somme sont tous propres de valeur propre λ_k. Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in E, \qquad L_k(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}).}$$

b) L'identité polynomiale de la question 4.d donne, en remplaçant X par f et le polynôme constant 1 par Id,

$$\sum_{k=1}^{p} L_k(f) = \mathrm{Id}.$$

En l'appliquant à x, on obtient la décomposition

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{p} x_k, \qquad x_k = L_k(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}).}$$

Précisons son unicité. Si $y_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$, le calcul des puissances de f sur y_i donne $L_k(f)(y_i) = L_k(\lambda_i) y_i$, égal à y_k lorsque $i = k$ et à zéro sinon. Ainsi une autre décomposition $x = \sum_{i=1}^{p} y_i$ entraîne, en appliquant $L_k(f)$, $L_k(f)(x) = y_k$ pour chaque k. Les composantes sont donc nécessairement celles indiquées ci-dessus. En particulier,

$$\boxed{E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}).}$$

6. Application à l'exemple de la partie I.

Pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, on a

$$\boxed{L_1(X) = \frac{X-2}{1-2} = 2 - X, \qquad L_2(X) = \frac{X-1}{2-1} = X - 1.}$$

Or $f(a,b,c) = (a, -2a+3b-2c, -a+b)$. Donc

$$\begin{aligned} L_1(f)(x) &= 2x - f(x) = (a,\ 2a - b + 2c,\ a - b + 2c), \\ L_2(f)(x) &= f(x) - x = (0,\ -2a + 2b - 2c,\ -a + b - c). \end{aligned}$$

Avec les vecteurs u_1, v_1, v_2 choisis à la question 2, cela s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} L_1(f)(x) &= au_1 + (a + 2c - b)v_1, \\ L_2(f)(x) &= (b - a - c)v_2, \\ x &= au_1 + (a + 2c - b)v_1 + (b - a - c)v_2. \end{aligned}}$$

On retrouve exactement la décomposition et les coordonnées de la question 2.b.

Exercice 2 – Deux lois à densité

À partir de la fonction arc tangente, on calcule les fonctions de répartition des deux lois proposées. La seconde servira de loi limite pour un maximum normalisé de variables indépendantes suivant la première.

Corrigé – Exercice 2 – Deux lois à densité.

1. Propriétés de la fonction arc tangente.

a) La fonction Arctan est la réciproque de la restriction de tan à $]-\pi/2, \pi/2[$. On a donc $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$. En dérivant cette identité et en utilisant $\tan' = 1 + \tan^2$, on retrouve

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

b) Comme $\tan(\pi/4) = 1$ et $\pi/4 \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.}$$

Pour $x > 0$, posons $h(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle, égale à $h(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \pi/2$. Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}.}$$

c) On a $\operatorname{Arctan}(0) = 0$ et $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$. La définition du nombre dérivé donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(0)}{x - 0} = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.}$$

2. Densité et fonction de répartition de X.

a) La fonction $f(x) = 1/[\pi(1+x^2)]$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1.a), une primitive est $\operatorname{Arctan}(x)/\pi$. La définition de la fonction arc tangente donne

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, cette fonction est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$: ses limites aux extrémités sont donc les bornes de cet intervalle. Les deux intégrales impropres sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ convergent et valent chacune $1/2$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

Toutes les conditions d'une densité sont satisfaites :

$$\boxed{f : x \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ est une densité sur } \mathbb{R}.}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la définition de la fonction de répartition donne

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2}.}$$

3. Densité et fonction de répartition de T.

a) La fonction g est positive ou nulle et continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Elle est également continue en 0 : en posant $y = 1/x$ pour $x > 0$, on a

$$g(x) = y^2 \mathrm{e}^{-y} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 = g(0).$$

Pour $x > 0$, on calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-1/x} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} = g(x).$$

Pour $0 < a < b$, il en résulte

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1/b} - \mathrm{e}^{-1/a}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-1/a} \to 0$ lorsque $a \to 0^+$ et $\mathrm{e}^{-1/b} \to 1$ lorsque $b \to +\infty$, l'intégrale sur $]0, +\infty[$ converge et vaut 1. La fonction est nulle sur $]-\infty, 0]$, donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad g \text{ est une densité.}}$$

De plus, $\mathbb{P}(T \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$: la loi est portée par $]0, +\infty[$.

b) Pour $x \leq 0$, l'intégrale définissant $G(x)$ est nulle. Pour $x > 0$,

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1/x} - \lim_{a \to 0^+} \mathrm{e}^{-1/a} = \mathrm{e}^{-1/x}.$$

On obtient

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

Exercice 2 – Maximum et convergence en loi

Les variables $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes et de fonction de répartition F calculée ci-dessus. On étudie $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \pi M_n / n$.

Corrigé – Exercice 2 – Maximum et convergence en loi.

4. Fonctions de répartition du maximum et du maximum normalisé.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x].$$

Les variables étant indépendantes, ces événements sont indépendants. Comme toutes les variables ont la même fonction de répartition F,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_{M_n}(x) = F(x)^n = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\right)^n.}$$

b) Le nombre π/n est strictement positif. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[Y_n \leq x] = \left[M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right].$$

La question a) donne donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n.}$$

5. Loi limite de Y_n.

a) Si $x \leq 0$, alors $nx/\pi \leq 0$. Puisque F est croissante et $F(0) = 1/2$,

$$0 \leq G_n(x) = F(nx/\pi)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par encadrement,

$$\boxed{\forall x \leq 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0.}$$

b) Fixons $x > 0$. La question 1.b), appliquée à $nx/\pi > 0$, donne

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right).$$

En remplaçant dans l'expression de G_n,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n.}$$

c) Pour ce réel $x > 0$ fixé, posons

$$a_n = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right).$$

On a $0 < a_n < 1/2$ et $a_n \to 0$. L'équivalent de la question 1.c) donne

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}, \qquad na_n \longrightarrow \frac{1}{x}.$$

Puisque $G_n(x) = (1-a_n)^n > 0$, on peut prendre le logarithme :

$$\ln G_n(x) = n\ln(1-a_n) = na_n \frac{\ln(1-a_n)}{a_n}.$$

Or $\ln(1-t)/t \to -1$ lorsque $t \to 0$, par la dérivabilité du logarithme en 1. Les deux facteurs convergent donc, et

$$\ln G_n(x) \longrightarrow -\frac{1}{x}.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \mathrm{e}^{-1/x}.}$$

d) Les questions a) et c) montrent que $G_n(x) \to G(x)$ pour tout réel x. La fonction G est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle l'est aussi en 0, car $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x} = 0 = G(0)$, tandis qu'elle est nulle à gauche. Les fonctions de répartition de Y_n convergent donc vers celle de T en tout point de continuité de cette dernière. Par le critère de convergence en loi par les fonctions de répartition,

$$\boxed{Y_n = \frac{\pi}{n} M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} T.}$$

Exercice 3 – Adjoint et endomorphismes normaux

Dans l'espace euclidien E, la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale. On construit l'adjoint $u^\star$ par la relation $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$. Un endomorphisme est dit normal lorsque $u \circ u^\star = u^\star \circ u$.

Corrigé – Exercice 3 – Adjoint et endomorphismes normaux.

Partie I – Construction de l'adjoint.

1. Expression et unicité de l'adjoint.

a) Si $u^\star$ existe, tout vecteur $u^\star(y)$ se développe dans la base orthonormale :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u^\star(y)\rangle e_i.$$

La relation caractérisant l'adjoint, appliquée à $x = e_i$, donne $\langle e_i, u^\star(y)\rangle = \langle u(e_i), y\rangle$. Ainsi

$$\boxed{u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.}$$

b) Pour chaque y, les coefficients de cette expression sont entièrement déterminés par u et y. Deux applications satisfaisant la relation ont donc la même valeur en tout vecteur. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Si l'adjoint de } u \text{ existe, il est unique.}}$$

2. Existence de l'adjoint.

a) Définissons $v(y) = \sum_i \langle u(e_i), y\rangle e_i$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $y, z \in E$, la linéarité du produit scalaire dans son second argument donne

$$\begin{aligned} v(ay + bz) &= \sum_i (a\langle u(e_i), y\rangle + b\langle u(e_i), z\rangle)e_i \\ &= av(y) + bv(z). \end{aligned}$$

Les valeurs de v appartiennent à E, donc $\boxed{v \text{ est un endomorphisme de } E.}$

b) Pour $x = \sum_i x_i e_i$, la linéarité de u et la base orthonormale donnent

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \sum_i x_i \langle u(e_i), y\rangle \\ &= \left\langle \sum_i x_i e_i, \sum_j \langle u(e_j), y\rangle e_j \right\rangle = \langle x, v(y)\rangle. \end{aligned}$$

L'application construite satisfait donc la relation voulue. La question 1 établit son unicité. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists! u^\star \in \mathcal{L}(E), \\ \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle. \end{array}}$$

Corrigé – Exercice 3 – Endomorphismes normaux.

Partie II – Endomorphismes normaux.

3. Cas d'un endomorphisme symétrique.

Par définition, si f est symétrique, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tous x, y. L'unicité de l'adjoint donne $f^\star = f$. Les deux compositions sont alors égales à f^2, donc

$$\boxed{f^\star = f, \qquad f \text{ est normal.}}$$

Dans toutes les questions suivantes, u est normal.

4. Égalité des normes et des noyaux.

a) La relation définissant l'adjoint et la symétrie du produit scalaire donnent

$$\|u(x)\|^2 = \langle x, u^\star(u(x))\rangle,$$
$$\|u^\star(x)\|^2 = \langle u(u^\star(x)), x\rangle = \langle x, u(u^\star(x))\rangle.$$

La normalité assure l'égalité des membres de droite. En prenant les racines carrées positives,

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|.}$$

b) Une norme est nulle exactement lorsque son vecteur est nul. On en déduit, pour chaque x, $u(x) = 0 \iff u^\star(x) = 0$, d'où

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^\star.}$$

5. Stabilité de l'orthogonal.

Soit F stable par u. Si $y \in F^\perp$, alors pour tout $x \in F$,

$$\langle x, u^\star(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0,$$

car $u(x) \in F$. Ainsi $u^\star(y) \in F^\perp$, ce qui établit

$$\boxed{F \text{ stable par } u \implies F^\perp \text{ stable par } u^\star.}$$

Cette implication découle de la définition de l'adjoint et reste valable pour tout endomorphisme.

6. Stabilité des sous-espaces associés à une valeur propre.

a) Pour $x \in E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$, la normalité donne

$$u(u^\star(x)) = u^\star(u(x)) = u^\star(\lambda x) = \lambda u^\star(x).$$

Donc $u^\star(x) \in E_\lambda$, et

$$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^\star.}$$

b) Pour tous $x, y \in E$, la symétrie du produit scalaire donne

$$\langle u^\star(x), y\rangle = \langle y, u^\star(x)\rangle = \langle u(y), x\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Ainsi u satisfait la relation caractérisant l'adjoint de $u^\star$. Par unicité,

$$\boxed{(u^\star)^\star = u.}$$

On applique la question 5 à l'endomorphisme $u^\star$ et au sous-espace E_λ, stable par cet endomorphisme d'après a). Son orthogonal est stable par $(u^\star)^\star = u$, donc

$$\boxed{E_\lambda^\perp \text{ est stable par } u.}$$

Problème – I. Un polynôme associé à une loi finie

La fonction $G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$ est un polynôme. Ses propriétés utiles se déduisent en dérivant cette somme finie, puis en utilisant les définitions de l'espérance et de la variance.

Corrigé – Problème – I. Un polynôme associé à une loi finie.

1. Valeur de $G(1)$.

La variable X prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$, donc la somme des probabilités de sa loi vaut 1 :

$$\boxed{G(1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1.}$$

2. Espérance à partir de G.

On dérive un polynôme, donc une somme finie :

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k)t^{k-1}.$$

En évaluant en $t = 1$ et en utilisant la définition de l'espérance d'une variable discrète,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = G'(1).}$$

3. Variance à partir de G.

Une seconde dérivation donne

$$G''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$

Pour $n = 1$, la somme est vide et vaut 0 ; la même égalité reste valable. Ainsi $\mathbb{E}(X^2) = G''(1) + G'(1)$. Tous les moments existent, puisque X est bornée. La formule de König–Huygens donne

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.}$$

Corrigé – Problème – II. Deux sommes classiques.

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$.

4. La somme harmonique u_n.

a) La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in [k, k+1]$, avec $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur ce segment de longueur 1,

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.}$$

b) Pour $n \geq 2$, on somme les inégalités précédentes de $k = 1$ à $n-1$. Les logarithmes se télescopent :

$$u_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n}.$$

En réarrangeant,

$$\boxed{\ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1.}$$

c) Puisque $\ln n > 0$ pour $n \geq 2$, on peut diviser cet encadrement par $\ln n$:

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Le théorème d'encadrement donne $u_n / \ln n \to 1$, soit

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

L'équivalence signifie ici que le quotient des deux termes tend vers 1.

5. Convergence de h_n.

On a $h_{n+1} - h_n = 1/(n+1)^2 > 0$: la suite est croissante. Pour $k \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$h_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Cette majoration vaut aussi pour $n = 1$. La suite croissante est majorée, donc le théorème de la limite monotone entraîne

$$\boxed{h_n \longrightarrow h \text{ pour un réel } h \in [1, 2].}$$

Problème – III. Étude probabiliste de l'algorithme

Le nombre d'affectations de `c` est le nombre de valeurs successivement supérieures à toutes les précédentes, en comptant la première valeur. On note X_n ce nombre sur une permutation uniforme de $1, \dots, n$, $G_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = j)t^j$, $E_n = \mathbb{E}(X_n)$ et $V_n = \mathbb{V}(X_n)$. On conditionne selon que le dernier élément est ou non le maximum.

Corrigé – Problème – III. Étude probabiliste de l'algorithme.

6. Échange des deux cases.

On conserve la valeur initiale de `A[j]` dans une variable auxiliaire, puis on effectue les deux affectations demandées :

```
aux = A[j]
A[j] = A[p]
A[p] = aux
```

La case `A[j]` reçoit l'ancienne valeur de `A[p]`, et la case `A[p]` reçoit l'ancienne valeur de `A[j]`. Si $j = p$, les valeurs restent inchangées, ce qui convient également.

7. Recherche du maximum et de son indice.

a) Initialement, $m = A[0]$. Après le passage de l'indice k dans la boucle, m vaut le maximum des cases $A[0], \dots, A[k]$: si $A[k] > m$, on actualise ce maximum, sinon il reste inchangé. Cette propriété se démontre par récurrence sur k. À la fin, m est donc le maximum de toute la liste. Celle-ci est une permutation de $1, \dots, n$, d'où

$$\boxed{m = n.}$$

Pour $n = 1$, la boucle est vide et $m = A[0] = 1$, donc le résultat reste vrai.

b) La variable c mémorise l'indice du maximum provisoire. Toutes les valeurs sont distinctes, donc le maximum est atteint à un unique indice. À la fin,

$$\boxed{c \text{ est l'indice Python de la case contenant } n.}$$

Les indices Python commencent à 0 : le nombre n occupe donc la position $c + 1$ lorsqu'on numérote les positions à partir de 1.

c) L'instruction recherchée est

```
c = A.index(n)
print(c)
```

La méthode `index` renvoie bien cet indice, puisque la valeur n apparaît une seule fois dans la liste.

8. Loi de X_1.

Si $n = 1$, la liste est [1]. La variable c est affectée une seule fois, par l'initialisation $c = 0$, puis la boucle est vide. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1.}$$

En particulier, $G_1(t) = t$, $E_1 = 1$ et $V_1 = 0$.

9. Premières lois et relation de récurrence.

a) On appelle ici *record* une valeur strictement supérieure à toutes les valeurs qui la précèdent, en comptant la première valeur comme un record. L'initialisation de c compte le premier record et chaque affectation $c = k$ en compte un nouveau : X_n est donc le nombre de records de la permutation. Il y en a au moins un et au plus n. Pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, la permutation

$$(1, 2, \ldots, j-1, n, n-1, \ldots, j)$$

possède exactement j records : les j premières valeurs sont successivement des records, puis aucune valeur ne dépasse n. Les parties vides de cette écriture sont omises lorsque $j = 1$ ou $j = n$. Cette permutation a pour probabilité $1/n! > 0$. Ainsi chaque valeur j est atteinte, et

$$\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

b) Il y a un seul record exactement lorsque la première valeur est n. Chaque position contient le maximum avec probabilité $1/n$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}.}$$

Il y a n records exactement lorsque la liste est strictement croissante. Une seule permutation possède cette propriété, à savoir $(1, 2, \ldots, n)$, d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}.}$$

Pour $n = 2$, ces deux cas épuisent les possibilités. Pour $n = 3$, la probabilité de la valeur 2 est $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$. Les lois sont donc

j	1	2
$\mathbb{P}(X_2 = j)$	1/2	1/2

j	1	2	3
$\mathbb{P}(X_3 = j)$	1/3	1/2	1/6.

c) Supposons $n \geq 2$. Les événements $H = [A_n = n]$ et $K = [A_n < n]$ constituent un système complet d'événements : ils sont disjoints et leur réunion est Ω. Le maximum occupe chacune des n positions avec la même probabilité, donc $\mathbb{P}(H) = 1/n$ et $\mathbb{P}(K) = (n-1)/n$. Sous la condition H, les $n-1$ premières valeurs forment une permutation de $1, \ldots, n-1$. Chacune des $(n-1)!$ permutations apparaît dans une unique permutation de taille n terminée par n ; elles sont donc équiprobables conditionnellement à H. Le nombre de records des $n-1$ premières valeurs a ainsi la loi de X_{n-1}. Le dernier élément n est un nouveau record, donc

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid H) = \mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1).$$

Sous la condition K, le dernier élément est un nombre $a \in [\![1, n-1]\!]$. Pour chaque a fixé, les valeurs précédentes sont les éléments de $[\![1, n]\!] \setminus \{a\}$. Remplaçons ces valeurs par leurs rangs dans cet ensemble ordonné : on obtient une permutation de $1, \ldots, n-1$, et cette transformation conserve tous les records. Fixons un ordre relatif de ces $n-1$ rangs. Pour chaque choix de $a \in [\![1, n-1]\!]$, il existe exactement une permutation entière qui termine par a et présente cet ordre relatif. Il y a donc $n-1$ permutations pour chacun des $(n-1)!$ ordres relatifs, parmi les $(n-$

$1)(n-1)!$ permutations réalisant K. Tous ces ordres relatifs sont ainsi équiprobables conditionnellement à K. Le nombre de records des premières valeurs a donc encore la loi de X_{n-1}. Le maximum n se trouve déjà parmi elles, et la dernière valeur $a < n$ ne peut être un nouveau record. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid K) = \mathbb{P}(X_{n-1} = j).$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet (H, K) donne finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) \qquad (2 \leq j \leq n).}$$

Les probabilités portant sur une valeur hors de $[\![1, n-1]\!]$ sont nulles.

d) Pour $n = 4$, on a $\mathbb{P}(X_4 = 1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(X_4 = 4) = 1/24$. La récurrence donne

$$\mathbb{P}(X_4 = 2) = \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{11}{24},$$
$$\mathbb{P}(X_4 = 3) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

j	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_4 = j)$	1/4	11/24	1/4	1/24.

10. Expression du polynôme G_n.

a) Pour $j = 1$, $\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = 1/(n-1)$. Le membre de droite de la récurrence vaut donc

$$\frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} = \mathbb{P}(X_n = 1).$$

Ainsi $\boxed{\text{La récurrence est aussi valable pour } j = 1.}$

b) En utilisant cette récurrence pour tous les indices de la somme finie,

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)t^j \\ &= \frac{t}{n}G_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n}G_{n-1}(t). \end{aligned}$$

La première égalité reste valable pour $t = 0$, car il s'agit d'identités de polynômes ; dans la seconde ligne, on change simplement l'indice de la première somme et on utilise les probabilités nulles aux indices 0 et n. Donc

$$\boxed{G_n(t) = \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t) \qquad (n \geq 2,\ t \in \mathbb{R}).}$$

c) Comme $G_1(t) = t$, une récurrence immédiate par multiplication des facteurs donne

$$\begin{aligned} G_n(t) &= t\prod_{k=2}^{n} \frac{t+k-1}{k} \\ &= \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{G_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j) \qquad (n \geq 1,\ t \in \mathbb{R}).}$$

11. Espérance de X_n.

La dérivation de l'identité de polynômes de la question 10 donne

$$G_n'(t) = \frac{1}{n}G_{n-1}(t) + \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}'(t).$$

On évalue en 1. Les questions 1 et 2 fournissent $G_{n-1}(1) = 1$ et $G_n'(1) = E_n$, d'où

$$\boxed{E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n} \qquad (n \geq 2).}$$

Avec $E_1 = 1$, on somme ces différences de 2 à n :

$$\boxed{E_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = u_n \qquad (n \geq 1).}$$

12. Variance de X_n et équivalent.

a) Une seconde dérivation donne

$$G_n''(t) = \frac{2}{n}G_{n-1}'(t) + \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}''(t),$$

donc $G_n''(1) - G_{n-1}''(1) = 2E_{n-1}/n$. La question 3 exprime $V_n = G_n''(1) + E_n - E_n^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \frac{2}{n}E_{n-1} + (E_n - E_{n-1}) - (E_n^2 - E_{n-1}^2) \\ &= \frac{2}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n} - \left(\left(E_{n-1} + \frac{1}{n}\right)^2 - E_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{2}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}E_{n-1} - \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \qquad (n \geq 2).}$$

b) Comme $V_1 = 0$, on somme ces différences :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Le terme ajouté à l'indice $k = 1$ vaut 0. Ainsi

$$\boxed{V_n = u_n - h_n \qquad (n \geq 1).}$$

c) Pour $n \geq 2$, on écrit

$$\frac{V_n}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln n} - \frac{h_n}{\ln n}.$$

Le premier quotient tend vers 1 d'après la question 4. La suite h_n converge, donc est bornée, tandis que $\ln n \to +\infty$; le second quotient tend donc vers 0. Par conséquent $V_n/\ln n \to 1$, soit

$$\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$