

Année : 2019

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

Sommaire

Exercice 1	1
<i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires ; Python</i>	<i>1</i>
Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; convergences de variables</i>	<i>2</i>
Exercice 3	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire</i>	<i>3</i>
Problème	5
<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; Probabilité discrètes ; Python</i>	<i>5</i>

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Exercice 1*Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires ; Python***Partie I — Étude d'un exemple**

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
c) En Python, la fonction `matrix_rank(M)` du module `numpy.linalg` renvoie le rang de la matrice M . On a exécuté :

```
import numpy as np
from numpy.linalg import matrix_rank

A = np.array([[1, 0, 0],
              [-2, 3, -2],
              [-1, 1, 0]])
r1 = matrix_rank(A - np.eye(3))
r2 = matrix_rank(A - 2 * np.eye(3))
print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

Le programme a affiché :

```
r1 = 1
r2 = 2
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

- d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$.
- 2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a , b et c , les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Partie II — Généralisation

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe

$$\bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}).$$

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D .

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \cdots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f .

Pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit

$$L_k = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

4) a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k.$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^p L_i = 1$.

5) a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie I, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; convergences de variables

Partie I — Question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan , est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x , de $\text{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- c) Justifier l'équivalent $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- 2) a) Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- 3) a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

- b) Déterminer la fonction de répartition G de T .

Partie II — Étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire.

- 4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n .
- b) On pose $Y_n = \frac{\pi}{n} M_n$. Justifier que sa fonction de répartition G_n est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{nx}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \right)^n.$$

- 5) a) Déterminer, pour tout $x \leq 0$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.
- b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\pi}{nx} \right) \right)^n.$$

- c) En déduire, pour tout $x > 0$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.
- d) Dédire des questions précédentes que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T .

Exercice 3

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Le produit scalaire de x et y est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie I — Définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E . On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E , noté u^* , qui, à tout $y \in E$, associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

- 1) a) Montrer que si u^* existe, alors, pour tout $y \in E$,

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i.$$

- b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

- 2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1.a) est effectivement un endomorphisme de E .
b) Conclure que cette application est l'unique endomorphisme de E , appelé adjoint de u , vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

Partie II — Étude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normal lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$.

- 3) Soit f un endomorphisme symétrique de E . Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

- 4) a) Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
b) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.
5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .
6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous-espace propre associé.
a) Montrer que E_λ est stable par u^* .
b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u .

Problème

Thèmes abordés : suites ; séries ; Probabilité discrètes ; Python

Partie I — Fonction génératrice

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on appelle fonction génératrice de X la fonction G définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

- 1) Calculer $G(1)$.
- 2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de G .
- 3) Établir la relation $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Partie II — Deux sommes classiques

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

- 4) a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1.$$

- c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 5) Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie III — Étude probabiliste d'un algorithme

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- 6) En Python, la fonction `randint(a,b)` du module `random` simule une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$. Compléter les lignes marquées afin qu'elles échangent les contenus de `A[j]` et `A[p]`.

```

1 from random import randint
2
3 n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
4 A = list(range(1, n + 1))
5 p = n - 1
6 for k in range(n):
7     j = randint(0, p)
8     aux = ...
9     A[j] = ...
10    A[p] = ...
11    p = p - 1
12 print(A)

```

- 7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, la liste A contient aléatoirement les entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les $n!$ permutations étant équiprobables. On exécute ensuite :

```

m = A[0]
c = 0
for k in range(1, n):
    if A[k] > m:
        m = A[k]
        c = k
print(c)

```

- a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n .
- b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ? On précisera le lien entre cet indice Python et la position de n dans la liste.
- c) Compléter l'instruction Python suivante afin qu'elle renvoie dans `c` le même indice que le script précédent, puis l'affiche :

```

c = A.index(...)
print(c)

```

On admet que les contenus de $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$ sont des variables aléatoires notées $A_1, A_2, \dots, A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique `c` effectuées au cours du script de la question 7, y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n .

On suppose que ces variables sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note G_n la fonction génératrice de X_n , E_n son espérance et V_n sa variance.

- 8) Donner la loi de X_1 .
- 9)
 - a) Montrer que $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - b) Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3 .
 - c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que
$$\forall n \geq 2, \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1) + \frac{n-1}{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j).$$
 - d) Donner la loi de X_4 .

- 10)
 - a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9.c) reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation

$$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t). \quad (\star)$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j).$$

11) En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n = u_n$.

12) Recherche d'un équivalent de V_n .

a) En dérivant deux fois la relation $(\star)$, montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n en fonction de u_n et h_n .

c) Montrer que $V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.