emlyon

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2019

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Partie A – Un endomorphisme de polynômes

Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère, sur $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\Psi_a(P) = 2P + (X-a)P', \qquad Q_k = (X-a)^k \quad (0 \leq k \leq n).$$

La fonction $\Phi_a(P)$ vaut $\dfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)P(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \neq a$ et $P(a)/2$ pour $x = a$. On étudie ces deux applications et leur réduction.

Corrigé – Partie A – Un endomorphisme de polynômes.

1. Linéarité et stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous $P, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et tous réels α, β, la linéarité de la dérivation donne

$$\begin{aligned}\Psi_a(\alpha P + \beta R) &= 2(\alpha P + \beta R) + (X-a)(\alpha P' + \beta R') \\ &= \alpha\Psi_a(P) + \beta\Psi_a(R).\end{aligned}$$

De plus, P' est de degré au plus $n-1$ s'il n'est pas nul, donc $(X-a)P'$ et $2P+(X-a)P'$ sont de degré au plus n. Cette propriété vaut également pour les polynômes constants et le polynôme nul. Ainsi

$$\boxed{\Psi_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Matrice dans la base canonique.

On a $\Psi_a(1) = 2$. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$\Psi_a(X^k) = 2X^k + k(X-a)X^{k-1} = (k+2)X^k - akX^{k-1}.$$

La colonne correspondant à X^k a donc son coefficient $k+2$ à la ligne correspondant à X^k, et $-ak$ à la ligne correspondant à X^{k-1}. En indexant les lignes et colonnes de 0 à n, la matrice M_a est donnée par

$$\boxed{(M_a)_{i,k} = \begin{cases} k+2 & \text{si } i = k, \\ -ak & \text{si } i = k-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, dont la diagonale est $(2, 3, \ldots, n+2)$ et la première diagonale au-dessus de la diagonale principale est $(-a, -2a, \ldots, -na)$.

3. Réduction de Ψ_a.

a) Les polynômes $Q_k = (X-a)^k$ ont chacun pour coefficient dominant 1, et leurs degrés sont $0, 1, \dots, n$. Ils sont linéairement indépendants : dans une relation non triviale $\sum_{k=0}^n \alpha_k Q_k = 0$, le terme d'indice maximal k tel que $\alpha_k \neq 0$ serait le seul à contribuer au coefficient de X^k, ce qui est impossible. Cette famille de $n+1$ polynômes est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $k \geq 1$, $Q_k' = k(X-a)^{k-1}$, et

$$\Psi_a(Q_k) = 2(X-a)^k + k(X-a)^k = (k+2)Q_k.$$

Pour $k = 0$, $Q_0 = 1$ et $\Psi_a(Q_0) = 2Q_0$: la même formule reste valable. La base $(Q_0, \dots, Q_n)$ est donc une base propre, et

$$\boxed{\Psi_a \text{ est diagonalisable}, \qquad \mathrm{Mat}_{(Q_0,\dots,Q_n)}(\Psi_a) = \mathrm{diag}(2, 3, \dots, n+2), \quad \mathrm{Sp}(\Psi_a) = \{2, 3, \dots, n+2\}.}$$

Pour vérifier qu'aucune autre valeur propre n'existe, si $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k Q_k \neq 0$ et $\Psi_a(P) = \lambda P$, la comparaison des coefficients dans cette base donne $(k+2-\lambda)\alpha_k = 0$ pour chaque k. Au moins un α_k est non nul, donc $\lambda = k+2$ pour l'un de ces indices.

b) Pour tout $R = \sum_{k=0}^n r_k Q_k$, l'unique solution de $\Psi_a(P) = R$ est

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{k+2} Q_k,$$

car les $k+2$ sont tous non nuls. L'endomorphisme est donc bijectif :

$$\boxed{\Psi_a \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

c) Le calcul effectué en 3.a donne, y compris pour $k = 0$,

$$\boxed{\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad \Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k.}$$

d) Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $P = \sum_{j=0}^n \alpha_j Q_j$ vérifie $\Psi_a(P) = (k+2)P$, alors

$$\sum_{j=0}^n (j-k)\alpha_j Q_j = 0.$$

Puisque les Q_j forment une base, $\alpha_j = 0$ pour $j \neq k$. Réciproquement, tout multiple de Q_k est un vecteur du sous-espace propre correspondant. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi_a - (k+2)\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(Q_k), \quad (Q_k) \text{ en est une base.}}$$

4. L'application Φ_a est l'inverse de Ψ_a.

a) La règle de dérivation d'un produit donne

$$\big((X-a)^2 P\big)' = 2(X-a)P + (X-a)^2 P' = (X-a)\big(2P + (X-a)P'\big).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\big((X-a)^2 P\big)' = (X-a)\Psi_a(P).}$$

b) Pour $x \neq a$, en intégrant cette identité entre a et x,

$$\int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t)\,\mathrm{d}t = \left[(t-a)^2 P(t)\right]_a^x = (x-a)^2 P(x).$$

La définition de Φ_a donne donc $\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = P(x)$. En $x = a$, on utilise $\Psi_a(P)(a) = 2P(a)$, d'où $\Phi_a(\Psi_a(P))(a) = \Psi_a(P)(a)/2 = P(a)$. Les deux fonctions sont ainsi égales sur tout $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \Phi_a(\Psi_a(P)) = P.}$$

c) Il reste à justifier que les images de Φ_a sont bien des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $R \in \mathbb{R}_n[X]$. La bijectivité de Ψ_a fournit un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $R = \Psi_a(P)$. La question 4.b montre alors que $\Phi_a(R) = P$. Ainsi $\Phi_a(R)$ appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$, et $\Phi_a(R) = \Psi_a^{-1}(R)$ pour tout R.

L'inverse d'un endomorphisme linéaire bijectif est linéaire : si $R = \Psi_a(P)$ et $S = \Psi_a(T)$, alors $\alpha R + \beta S = \Psi_a(\alpha P + \beta T)$, donc son image réciproque est $\alpha P + \beta T$. On obtient ainsi

$$\boxed{\Phi_a \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X], \qquad \Phi_a = \Psi_a^{-1}, \qquad \Phi_a^{-1} = \Psi_a.}$$

d) Puisque $\Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k$, l'application de son inverse donne $Q_k = (k+2)\Phi_a(Q_k)$. Ainsi

$$\Phi_a(Q_k) = \frac{1}{k+2} Q_k.$$

La même base $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base propre de Φ_a. Ses valeurs propres sont précisément les valeurs diagonales dans cette base :

$$\boxed{\begin{array}{c}\Phi_a \text{ est diagonalisable}, \qquad \mathrm{Sp}(\Phi_a) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+2}\right\}, \\ \mathrm{Mat}_{(Q_0,\dots,Q_n)}(\Phi_a) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+2}\right).\end{array}}$$

Partie B – Fonction définie par une intégrale

Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\Phi(f)(x) = h(x)/x^2$ pour $x \neq 0$, tandis que $\Phi(f)(0) = f(0)/2$. On établit les propriétés nécessaires aux parties suivantes.

Corrigé – Partie B – Fonction définie par une intégrale.

5. La primitive h et son comportement en 0.

a) La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental de l'analyse assure donc

$$\boxed{h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \qquad h'(x) = xf(x).}$$

b) Sur le segment $[0, x]$, avec $x > 0$, la fonction continue f atteint son minimum en un point α_x et son maximum en un point β_x. Ainsi, pour $0 \leq t \leq x$,

$$f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x).$$

On multiplie par $t \geq 0$, puis on intègre sur ce segment :

$$\boxed{f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leq h(x) \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.}$$

c) Puisque $\int_0^x t\,\mathrm{d}t = x^2/2$, l'encadrement devient

$$\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}.$$

Lorsque $x \to 0^+$, les deux points de $[0, x]$ tendent vers 0. La continuité de f en 0 et le théorème d'encadrement donnent

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$$

d) Pour $x < 0$, on écrit $h(x) = \int_x^0 (-t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ implique $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Si $-\delta < x < 0$, cette majoration vaut pour tout $t \in [x, 0]$. Comme $-t \geq 0$ sur ce segment,

$$\begin{aligned}\left|h(x) - \frac{x^2 f(0)}{2}\right| &= \left|\int_x^0 (-t)(f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \varepsilon \int_x^0 (-t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon x^2}{2}.\end{aligned}$$

Après division par x^2, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$$

6. Continuité et dérivée de $\Phi(f)$.

Sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, le quotient $h(x)/x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les limites de la question 5 coïncident avec la valeur choisie en 0, donc $\Phi(f)$ est continue

sur toute la droite. Pour $x \neq 0$, la dérivation du quotient donne

$$\begin{aligned}\big(\Phi(f)\big)'(x) &= \frac{h'(x)}{x^2} - \frac{2h(x)}{x^3} \\ &= \frac{f(x)}{x} - \frac{2}{x}\Phi(f)(x).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c}\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*, \\ \big(\Phi(f)\big)'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - 2\Phi(f)(x)) \quad (x \neq 0).\end{array}}$$

7. Parité et positivité.

a) Pour $x \neq 0$, le changement de variable linéaire $t = -u$ dans l'intégrale sur le segment de bornes $0, -x$ donne

$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x u f(-u)\,\mathrm{d}u.$$

Si f est paire, $f(-u) = f(u)$: le membre de droite vaut $\Phi(f)(x)$. Si f est impaire, $f(-u) = -f(u)$: il vaut $-\Phi(f)(x)$. Dans ce dernier cas, $f(0) = 0$ entraîne aussi $\Phi(f)(0) = 0$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f \text{ paire} & \Longrightarrow & \Phi(f) \text{ paire}, \\ f \text{ impaire} & \Longrightarrow & \Phi(f) \text{ impaire}.\end{array}}$$

b) Supposons $f(x) \geq 0$ pour tout réel x. Pour $x > 0$, $tf(t) \geq 0$ sur $[0, x]$, donc $h(x) \geq 0$. Pour $x < 0$, la formule $h(x) = \int_x^0 (-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ donne encore $h(x) \geq 0$. En 0, on a $\Phi(f)(0) = f(0)/2 \geq 0$. Ainsi

$$\boxed{f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.}$$

8. Limites aux deux extrémités.

La linéarité de l'intégrale, et la définition au point 0, donnent pour toutes fonctions continues f, g et tous réels a, b,

$$\Phi(af + bg) = a\Phi(f) + b\Phi(g).$$

En particulier, pour une fonction constante de valeur ℓ, on a $\Phi(\ell) = \ell/2$.

a) Si $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$, la fonction $g = f - \ell$ tend vers 0. Le résultat admis dans l'énoncé s'applique à g, donc $\Phi(g)(x) \to 0$. Comme $\Phi(f) = \Phi(g) + \ell/2$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.}$$

b) Posons maintenant $h_0(x) = f(-x)$. Si $f(x) \to \ell$ en $-\infty$, alors $h_0(x) \to \ell$ en $+\infty$. Le changement de variable de la question 7.a), valable pour toute fonction continue, montre

$$\Phi(h_0)(x) = \Phi(f)(-x),$$

y compris en 0 par les définitions. Le résultat de a), appliqué à h_0, donne donc $\Phi(f)(-x) \to \ell/2$ lorsque $x \to +\infty$, soit

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to-\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.}$$

Partie C – Une application en probabilité

On part de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire à densité et on pose $G = 2\Phi(F)$, avec

$$G(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x tF(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \neq 0), \qquad G(0) = F(0).$$

On montre que G est encore une fonction de répartition d'une variable à densité, puis on applique cette construction à $h_1(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x > 0$, et $h_1(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Corrigé – Partie C – Une application en probabilité.

Puisque F est la fonction de répartition d'une variable à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$, croissante, à valeurs dans $[0,1]$, et vérifie

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

9. Comparaison entre F et G.

Pour $x > 0$ et $0 \leq t \leq x$, on a $0 \leq F(t) \leq F(x)$. Comme $t \geq 0$,

$$0 \leq \int_0^x tF(t)\,\mathrm{d}t \leq F(x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}F(x).$$

En multipliant par $2/x^2$, on obtient $0 \leq G(x) \leq F(x)$.

Si $x < 0$, on récrit l'intégrale sous la forme

$$\int_0^x tF(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 (-t)F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \leq t \leq 0$, on a $F(x) \leq F(t) \leq 1$ et $-t \geq 0$. Ainsi

$$\frac{x^2}{2}F(x) = F(x)\int_x^0 (-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x tF(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^2}{2}.$$

D'où

$$\boxed{\begin{array}{l} x > 0 \implies 0 \leq G(x) \leq F(x) \leq 1, \\ x < 0 \implies 0 \leq F(x) \leq G(x) \leq 1. \end{array}}$$

10. Dérivée de G hors de l'origine.

La continuité de F permet d'appliquer la question 6 à $\Phi(F)$. Ainsi G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et, pour $x \neq 0$,

$$G'(x) = 2\big(\Phi(F)\big)'(x) = \frac{2}{x}\big(F(x) - 2\Phi(F)(x)\big).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \neq 0, \qquad G'(x) = \frac{2}{x}\big(F(x) - G(x)\big).}$$

11. Une densité et sa fonction de répartition.

On pose $g(x) = G'(x)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Pour $x > 0$, la question 9 donne $F(x) - G(x) \geq 0$, donc $g(x) \geq 0$. Pour $x < 0$, $F(x) - G(x) \leq 0$ et $2/x < 0$, donc

$g(x) \geq 0$ également. Par définition, $g(0) = 0$. La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}$, et elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 10.

Les résultats de la partie B assurent la continuité de G en 0 et sur $\mathbb{R}$, avec $G(0) = F(0)$. En appliquant la question 8 aux limites de F, on obtient aussi

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} G(x) = 1.$$

Pour $R > 0$ et $0 < \varepsilon < R$, puisque G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les segments $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$, le théorème fondamental donne

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t = G(-\varepsilon) - G(-R), \qquad \int_{\varepsilon}^{R} g(t)\,\mathrm{d}t = G(R) - G(\varepsilon).$$

En faisant tendre ε vers 0, puis R vers $+\infty$, les limites précédentes et la continuité en 0 donnent

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = F(0), \qquad \int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(0).$$

Ces deux intégrales convergent et leur somme vaut 1. On a donc

$$\boxed{g \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Soit V une variable de densité g. Pour $x < 0$, l'intégration de G' de $-R$ à x, puis le passage à la limite $R \to +\infty$, donne

$$\mathbb{P}(V \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x).$$

Pour $x = 0$, cette égalité résulte du premier calcul d'intégrale ci-dessus. Enfin, pour $x > 0$, la continuité de G en 0 donne

$$\mathbb{P}(V \leq x) = F(0) + \int_{0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(0) + G(x) - G(0) = G(x).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}(V \leq x) = G(x).}$$

12. Application à la densité h_1.

a) La fonction h_1 est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue de part et d'autre de 0, et aussi en 0 puisque $\lim_{x\to0^+} 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 = h_1(0)$. Pour $R > 0$, la dérivée de $-\mathrm{e}^{-x^2}$ vaut $2x\mathrm{e}^{-x^2}$, donc

$$\int_0^R h_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^R = 1 - \mathrm{e}^{-R^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Comme h_1 est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on conclut

$$\boxed{h_1 \text{ est une densité de probabilité,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)\,\mathrm{d}x = 1.}$$

b) Une variable X_1 de densité h_1 est positive avec probabilité 1. L'existence de son espérance équivaut donc à la convergence de $\int_0^{+\infty} 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Sur le segment $[0, R]$, on effectue une intégration par parties avec

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \qquad v(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}, \quad v'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment. Il vient

$$\int_0^R 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^R + \int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -R\mathrm{e}^{-R^2} + \int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme $R\mathrm{e}^{-R^2}$ tend vers 0 par croissance comparée. Pour calculer la dernière intégrale, on rappelle que la densité de la loi normale centrée réduite est $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Sa parité et son intégrale égale à 1 donnent

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[0,+\infty[$ sur lui-même, avec $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\sqrt{2}$. Les deux intégrales impropres ont la même nature, et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

L'intégration par parties permet donc de conclure à la convergence du moment demandé, et

$$\boxed{X_1 \text{ admet une espérance,} \qquad \mathbb{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

c) La fonction de répartition de X_1 est

$$\boxed{H_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1-\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

Pour $x < 0$, H_1 est nulle sur $[x,0]$, donc $\Phi(H_1)(x) = 0$; en 0, $\Phi(H_1)(0) = H_1(0)/2 = 0$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x tH_1(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t(1-\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{H_2(x) = 2\Phi(H_1)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

D'après la question 11, cette fonction est la fonction de répartition d'une variable X_2 à densité. Sa dérivation pour $x > 0$ donne

$$H_2'(x) = \frac{2(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x^3} - \frac{2\mathrm{e}^{-x^2}}{x} = \frac{2\big(1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}\big)}{x^3}.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, sa dérivée est nulle. Une densité de X_2 est donc

$$\boxed{h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{2\big(1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}\big)}{x^3} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

Montrons enfin la convergence de son premier moment. Pour tout $s \geq 0$, la dérivée de $1-(1+s)\mathrm{e}^{-s}$ est $s\mathrm{e}^{-s}$, d'où

$$1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = \int_0^{x^2} s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Comme $0 \leq s\mathrm{e}^{-s} \leq s$, on a, pour $x > 0$,

$$0 \leq 1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2} \leq \frac{x^4}{2}.$$

Ainsi $0 \leq h_2(x) \leq x$, ce qui donne $0 \leq xh_2(x) \leq x^2$ pour $0 < x \leq 1$ et prouve la convergence du moment au voisinage de 0. D'autre part, $0 \leq 1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$, donc

$$0 \leq xh_2(x) \leq \frac{2}{x^2} \qquad (x \geq 1).$$

L'intégrale de $2/x^2$ sur $[1,+\infty[$ converge. Par comparaison, les deux portions de $\int_0^{+\infty} xh_2(x)\,\mathrm{d}x$ convergent. Puisque X_2 est positive avec probabilité 1, il vient

$$\boxed{\mathbb{E}(|X_2|) = \int_0^{+\infty} xh_2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty, \qquad X_2 \text{ admet une espérance.}}$$

Partie D – Espace vectoriel et produit scalaire

On considère l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et l'ensemble E_2 de celles pour lesquelles $\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge. On construit un produit scalaire sur E_2, puis on établit que l'opérateur Φ conserve cet espace et vérifie $\|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|$.

Corrigé – Partie D – Espace vectoriel et produit scalaire.

13. Convergence absolue des intégrales de produits.

a) Pour tous réels x, y, le carré $(|x| - |y|)^2$ est positif ou nul. En le développant, on obtient $x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0$, donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}.}$$

b) Si $f, g \in E_2$, la fonction $|fg|$ est continue et positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$. La question a) donne

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}.$$

Les deux intégrales des carrés convergent par définition de E_2. Par comparaison, l'intégrale de $|fg|$ converge également, et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.}$$

Ainsi l'intégrale de fg est absolument convergente.

14. Structure d'espace vectoriel de E_2.

La fonction nulle appartient à E_2. Si $f, g \in E_2$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $af + bg$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$(af + bg)^2 = a^2 f^2 + 2abfg + b^2 g^2.$$

Les intégrales des deux carrés convergent, et celle du produit est absolument convergente par la question 13. En intégrant l'égalité sur $[0, X]$ puis en faisant tendre X vers $+\infty$, on voit que l'intégrale de $(af + bg)^2$ converge. Ainsi $af + bg \in E_2$, ce qui prouve

$$\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

15. Construction du produit scalaire.

L'application est bien définie par la convergence absolue établie en 13. Pour $f, g \in E_2$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, f\rangle.$$

Elle est donc symétrique. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, g \in E_2$, la linéarité des intégrales convergentes donne

$$\langle af_1 + bf_2, g\rangle = a\langle f_1, g\rangle + b\langle f_2, g\rangle.$$

La symétrie donne aussi la linéarité dans le second argument : l'application est bilinéaire. Enfin,

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Si f n'est pas identiquement nulle, choisissons $x_0 \geq 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité sur $\mathbb{R}_+$, il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de longueur strictement positive, contenant x_0, tel que

$$\forall x \in I, \qquad |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Lorsque $x_0 = 0$, on prend un intervalle $[0, \eta]$ avec $\eta > 0$. On a alors

$$\langle f, f\rangle \geq \int_I f(x)^2 \,\mathrm{d}x \geq \frac{f(x_0)^2}{4} \,\text{longueur}(I) > 0.$$

Donc $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f = 0$. Toutes les propriétés sont établies :

$$\boxed{\begin{array}{c}\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{Cette formule définit un produit scalaire sur } E_2, \\ \|f\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{array}}$$

Partie D – Action de l'opérateur Φ

Pour $f \in E_2$, on pose $h(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\varphi = \Phi(f)$. On utilise une intégration par parties et une inégalité sur les intégrales sur segments pour contrôler φ, puis déterminer la limite de $X\varphi(X)^2$.

Corrigé – Partie D – Action de l'opérateur Φ.

16. Norme de $\Phi(f)$ et identité intégrale.

a) D'après la partie B, φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\frac{h(x)}{x^2} = \varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{f(0)}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{h(x)^2}{x^4} = \varphi(x)^2 \longrightarrow \frac{f(0)^2}{4}, \qquad \frac{h(x)^2}{x^3} = x\varphi(x)^2 \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)^2}{x^3} = 0.}$$

b) Fixons $X > 0$ et $0 < \varepsilon < X$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(x) = xf(x)$. Sur $[\varepsilon, X]$, les fonctions

$$u(x) = h(x)^2, \qquad v(x) = -\frac{1}{3x^3}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$u'(x) = 2h(x)xf(x), \qquad v'(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{h(x)^2}{3x^3}\right]_\varepsilon^X + \frac{2}{3}\int_\varepsilon^X \frac{h(x)f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{h(\varepsilon)^2}{3\varepsilon^3} + \frac{2}{3}\int_\varepsilon^X f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le terme en ε tend vers 0 par a). Les intégrandes $h(x)^2/x^4 = \varphi(x)^2$ et $f(x)\varphi(x)$ se prolongent continûment en 0 ; leurs intégrales sur $[0, X]$ existent donc. On peut faire tendre ε vers 0 dans cette égalité et obtenir

$$\boxed{\forall X > 0, \qquad \int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{X\varphi(X)^2}{3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Cette formule est celle de l'énoncé, puisque $X\varphi(X)^2 = h(X)^2/X^3$.

c) Fixons $X > 0$ et notons

$$A_X = \int_0^X f(x)^2\,\mathrm{d}x, \quad B_X = \int_0^X f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad C_X = \int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale d'un carré est positive ou nulle, donc

$$0 \leq \int_0^X (\lambda f(x) + \varphi(x))^2\,\mathrm{d}x = A_X\lambda^2 + 2B_X\lambda + C_X.$$

Si $A_X = 0$, cette expression est $2B_X\lambda + C_X$. Elle ne peut être positive ou nulle pour tout réel λ que si $B_X = 0$, et l'inégalité recherchée est immédiate. Si $A_X > 0$, on choisit $\lambda = -B_X/A_X$; il vient

$$0 \leq C_X - \frac{B_X^2}{A_X}, \qquad |B_X| \leq \sqrt{A_X}\sqrt{C_X}.$$

Les deux cas donnent

$$\boxed{\left|\int_0^X f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_0^X f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.}$$

Cela implique en particulier l'inégalité demandée sans valeur absolue.

d) Le terme $-X\varphi(X)^2/3$ de b) est négatif ou nul. En utilisant c), on obtient

$$0 \leq C_X \leq \frac{2}{3}B_X \leq \frac{2}{3}\sqrt{A_X}\sqrt{C_X}.$$

Si $C_X = 0$, la conclusion est immédiate. Sinon, on divise par $\sqrt{C_X} > 0$, ce qui donne dans tous les cas

$$\boxed{\forall X > 0, \qquad \left(\int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^X f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.}$$

e) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par la partie B. Comme l'intégrande est positif ou nul, $X \mapsto \int_0^X \varphi^2$ est croissante. La question d) donne

$$0 \leq \int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{4}{9}\int_0^X f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{4}{9}\|f\|^2.$$

Cette fonction croissante et majorée admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$. L'intégrale de φ^2 converge donc, ce qui prouve $\varphi \in E_2$. En passant à la limite dans d),

$$\boxed{\Phi(f) \in E_2, \qquad \|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|.}$$

f) Réécrivons l'identité de b) sous la forme

$$X\varphi(X)^2 = -3\int_0^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^X f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La première intégrale converge par e). Puisque f et φ appartiennent à E_2, la seconde converge absolument par la question 13.b). Le membre de droite admet donc une limite finie

$$L = -3\|\varphi\|^2 + 2\langle f, \varphi\rangle.$$

Le membre de gauche est positif ou nul pour tout $X > 0$, donc $L \geq 0$. Supposons $L > 0$. Il existe $X_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq X_0$,

$$x\varphi(x)^2 \geq \frac{L}{2}, \qquad \varphi(x)^2 \geq \frac{L}{2x}.$$

On obtient alors, pour tout $X \geq X_0$,

$$\int_{X_0}^X \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{L}{2}\int_{X_0}^X \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{L}{2}\ln\left(\frac{X}{X_0}\right) \longrightarrow +\infty.$$

Cela contredit la convergence de l'intégrale de φ^2. Ainsi $L = 0$, et

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty} X\big(\Phi(f)(X)\big)^2 = 0.}$$

g) Dans l'identité de b), le terme de bord tend vers 0 par f). Les deux intégrales convergent, par e) et 13.b). En faisant tendre X vers $+\infty$ et en utilisant la symétrie du produit scalaire, on obtient

$$\boxed{\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle\Phi(f), f\rangle.}$$

Partie E – Un analogue discret de l'opérateur Φ

Pour une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs ou nuls, on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

On étudie la monotonie et la limite dans le cas décroissant, puis une identité de sommes finies qui permet de transformer une loi de probabilité discrète.

Corrigé – Partie E – Un analogue discret de l'opérateur Φ.

17. Calcul de v_n en Python.

On additionne les n termes ku_k en utilisant la fonction `suite_u` fournie, puis on divise par $n(n+1)$:

```
def suite_v(n):
    somme = 0
    for k in range(1, n + 1):
        somme = somme + k * suite_u(k)
    return somme / (n * (n + 1))
```

La fonction prend en entrée un entier $n \geq 1$, conformément à la définition de la suite.

18. Cas d'une suite (u_n) décroissante.

a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure donc sa convergence vers un réel $\ell \geq 0$:

$$\boxed{u_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty[.}$$

b) Sur chacun des graphiques, les valeurs de v_n semblent décroître et se rapprocher d'une limite égale à la moitié de celle de u_n. Les quatre exemples suggèrent les valeurs suivantes :

u_n	$\lim u_n$	limite conjecturée de v_n
e^{1/n^2}	1	1/2
e^{-n}	0	0
$(6n+1)/(3n-1)$	2	1
$4 + 5(0{,}2)^n$	4	2

La conjecture générale est donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante et converge vers } \ell/2.}$$

Les observations graphiques seront justifiées par les questions suivantes.

c) Puisque (u_n) est décroissante, $u_k \geq u_n$ pour $1 \leq k \leq n$. Les coefficients k étant positifs,

$$v_n \geq \frac{u_n}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{u_n}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi $\boxed{v_n \geq u_n/2.}$ Pour le second encadrement, séparons les deux blocs de la somme finie :

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \right).$$

La première somme vaut $n(n+1)v_n$. Dans la seconde, $u_k \leq u_{n+1}$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leq u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} k = u_{n+1}\left(n(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(3n+1)}{2}u_{n+1}.$$

En reportant dans v_{2n} et en simplifiant les facteurs,

$$\boxed{v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}.}$$

d) La définition de v_{n+1} donne

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)v_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} ku_k \\ &= n(n+1)v_n + (n+1)u_{n+1}.\end{aligned}$$

En divisant par $n+1$,

$$\boxed{(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}.}$$

Cette égalité équivaut à $n(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1} - 2v_{n+1}$, d'où

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).}$$

e) La première inégalité de c), appliquée à $n+1$, donne $2v_{n+1} \geq u_{n+1}$. La formule de d) montre alors $v_{n+1} - v_n \leq 0$: (v_n) est décroissante. Comme $u_k \geq 0$, on a $v_n \geq 0$. La suite décroissante est donc minorée et converge, par le théorème de la limite monotone, vers un réel $L \geq 0$. En passant à la limite dans $v_n \geq u_n/2$, on obtient $L \geq \ell/2$. La sous-suite v_{2n} converge également vers L. Dans la seconde inégalité de c), les coefficients tendent respectivement vers $1/4$ et $3/8$, tandis que $u_{n+1} \to \ell$. Par passage à la limite,

$$L \leq \frac{1}{4}L + \frac{3}{8}\ell, \qquad \text{donc} \qquad L \leq \frac{\ell}{2}.$$

Les deux inégalités imposent $L = \ell/2$, ce qui prouve les conjectures :

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}, \qquad v_n \longrightarrow \ell/2.}$$

19. Cas où $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

On suppose ici uniquement que les termes u_n sont positifs ou nuls et que leur série converge. Notons sa somme U.

a) Pour un entier $N \geq 1$, les deux sommes considérées sont finies. On peut donc regrouper les termes par leur indice k :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{N} ku_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Or $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$, donc la somme intérieure se télescope et vaut $1/k - 1/(N+1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} u_k - \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} k u_k = \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N.\end{aligned}$$

On obtient l'identité

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N.}$$

b) Les termes v_n sont positifs ou nuls, donc leurs sommes partielles sont croissantes. L'identité précédente et $Nv_N \geq 0$ donnent

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} v_n \leq \sum_{k=1}^{N} u_k \leq U.$$

Les sommes partielles sont croissantes et majorées ; elles convergent donc vers un réel $V \in [0, U]$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge.}}$$

c) En réarrangeant l'identité de a),

$$N v_N = \sum_{k=1}^{N} u_k - \sum_{n=1}^{N} v_n \longrightarrow U - V =: L.$$

La limite est finie et positive ou nulle. Supposons $L > 0$. Il existerait un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, $Nv_N \geq L/2$, donc

$$v_N \geq \frac{L}{2N}.$$

La série harmonique $\sum_{N\geq N_0} 1/N$ diverge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_N$ divergerait alors, contrairement à b). Cette contradiction impose

$$\boxed{N v_N \longrightarrow 0.}$$

d) En passant à la limite dans l'identité de a), avec le résultat de c),

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.}$$

20. Transformation d'une loi de probabilité.

a) Posons $u_k = \mathbb{P}(Y = k)$. Les u_k sont positifs ou nuls et $\sum_{k\geq 1} u_k = 1$, puisque Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Le résultat de la question 19 s'applique et donne, pour

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k),$$

les propriétés $v_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 1} v_n = 1$. Les v_n définissent donc une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. On peut en réaliser explicitement une variable aléatoire. Posons $a_0 = 0$ et $a_n = \sum_{j=1}^{n} v_j$, de sorte que $a_n \to 1$. Sur un espace probabilisé portant une variable U à valeurs dans $]0,1[$ et uniforme sur cet intervalle, définissons Z comme le premier entier $n \geq 1$ tel que $U \leq a_n$. Cet entier existe, car $U < 1$ et $a_n \to 1$. On a

$$[Z = n] = [a_{n-1} < U \leq a_n], \qquad \mathbb{P}(Z = n) = a_n - a_{n-1} = v_n.$$

Pour chaque entier n, $[Z \leq n] = [U \leq a_n]$ est un événement ; ainsi Z est bien une variable aléatoire. Cette construction réalise donc la loi recherchée :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k).}$$

b) Supposons que Y admet une espérance finie, notée m. Comme $Y \geq 1$, $m \geq 1$, donc $m > 0$. Par définition de l'espérance d'une variable discrète positive,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \longrightarrow m.$$

Par conséquent

$$\frac{\mathbb{P}(Z = n)}{m/n^2} = \frac{n}{n+1} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k)}{m} \longrightarrow 1.$$

Cela prouve l'équivalence

$$\boxed{\mathbb{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}.}$$

Les termes de la série définissant l'espérance de Z vérifient alors $n\mathbb{P}(Z = n) \sim m/n$. En particulier, pour n assez grand,

$$n\mathbb{P}(Z = n) \geq \frac{m}{2n}.$$

La série harmonique diverge et $m > 0$, donc $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(Z = n)$ diverge vers $+\infty$ par comparaison. Ainsi

$$\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance finie.}}$$