

Année : 2019

École : EML

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Problème	1
<i>Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; fonctions d'une variable ; intégrales ; intégrales généralisées ; variables à densité ; algèbre bilinéaire ; suites ; séries ; probabilités discrètes ; Python . . .</i>	1

Problème

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; fonctions d'une variable ; intégrales ; intégrales généralisées ; variables à densité ; algèbre bilinéaire ; suites ; séries ; probabilités discrètes ; Python

Consignes

Le sujet est composé d'un unique problème en cinq parties, relativement indépendantes. La partie A étudie des endomorphismes de polynômes et est indépendante du reste. Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel ; certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D. La partie E étudie un analogue discret de cet opérateur et est indépendante du reste.

Partie A — Étude d'un endomorphisme de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\Psi_a(P) = 2P + (X - a)P'.$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t) dt, & x \neq a, \\ \frac{P(a)}{2}, & x = a. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit $Q_k = (X - a)^k$.

- 1) Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3)
 - a) Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
 - b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - c) Calculer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\Psi_a(Q_k)$.
 - d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a .
- 4)
 - a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $((X - a)^2 P(X))'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
 - b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.
 - c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
 - d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Partie B — Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ .

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt, & x \neq 0, \\ \frac{f(0)}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

5) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

a) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $h'(x)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe $\alpha_x, \beta_x \in [0, x]$ tels que

$$f(\alpha_x) \int_0^x t dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq f(\beta_x) \int_0^x t dt.$$

c) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

d) Montrer que l'on a aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6) Montrer que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - 2\Phi(f)(x)).$$

7) a) Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est paire (respectivement impaire).

b) Montrer que, si f est positive, alors $\Phi(f)$ est positive.

8) On admet le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \Phi(f) = 0.$$

a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$, où $g : x \mapsto f(x) - \ell$, montrer

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \Phi(f) = \frac{\ell}{2}.$$

b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$, où $h : x \mapsto f(-x)$, montrer

$$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{-\infty} \Phi(f) = \frac{\ell}{2}.$$

Partie C — Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B. On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On pose $G = 2\Phi(F)$, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x tF(t) dt, & x \neq 0, \\ F(0), & x = 0. \end{cases}$$

9) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq G(x) \leq F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad 0 \leq F(x) \leq G(x).$$

10) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et exprimer $G'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^*$, à l'aide de x , $F(x)$ et $G(x)$.

11) On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} G'(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V , puis que G est la fonction de répartition de V .

12) On définit h_1 sur $\mathbb{R}$ par

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2xe^{-x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

b) Montrer que X_1 admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

D'après la question 11, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée X_2 . Déterminer une densité h_2 de X_2 , puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherche pas à calculer).

Partie D — Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge.

Pour toute fonction f de E , on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t) dt, & x > 0, \\ \frac{f(0)}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

13) a) Justifier : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

b) En déduire que, pour toutes fonctions f, g de E_2 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente.

14) Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f, g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx.$$

15) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire de E_2 .

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée $\| \cdot \|$.

16) Soit f une fonction de E_2 . On note, comme dans la partie B, $h(x) = \int_0^x tf(t) dt$.

a) Calculer les limites en 0 des fonctions $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{(h(X))^2}{X^3} + \frac{2}{3} \int_0^X f(x)\Phi(f)(x) dx.$$

c) Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale

$$\lambda \mapsto \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx,$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x) dx \leq \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

d) En déduire :

$$\forall X > 0, \quad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

e) Montrer alors que $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que $\|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|$.

f) En utilisant la relation de la question 16.b, justifier que la limite de $X \mapsto X(\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis, par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g) En déduire $\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle \Phi(f), f \rangle$.

Partie E — Étude d'une suite

Dans cette partie, indépendante des précédentes, on étudie un analogue discret de l'application Φ . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

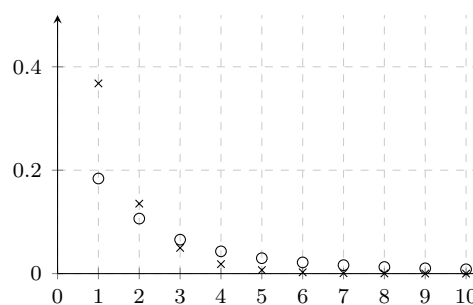
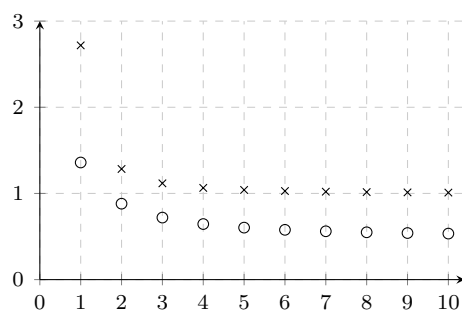
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

17) On suppose que l'on dispose d'une fonction Python `suite_u(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de u_n . Écrire une fonction Python `suite_v(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de v_n .

18) On suppose, dans cette question uniquement, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

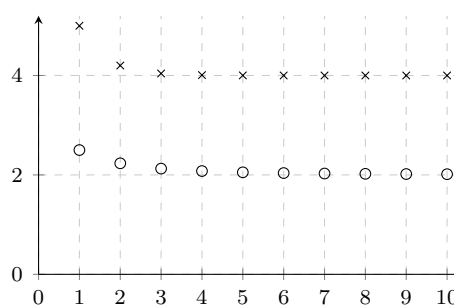
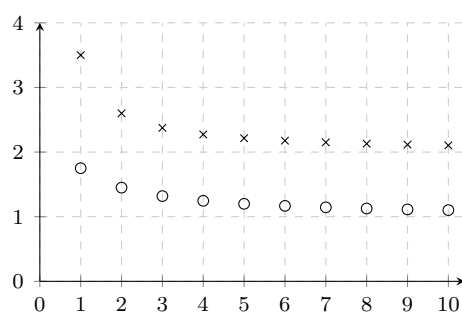
a) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

b) Pour différentes suites décroissantes, on représente ci-dessous les premiers termes de (u_n) avec le symbole $\times$ et ceux de (v_n) avec le symbole $\oplus$. À la vue des graphes, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de (v_n) en fonction de celle de (u_n) ?



Cas où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{1/n^2}$

Cas où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{-n}$



Cas où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{6n+1}{3n-1}$

Cas où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 4 + 5(0,2)^n$

c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \geq \frac{u_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}.$$

d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).$$

e) Démontrer toutes les conjectures faites à la question 18.b.

19) On suppose, dans cette question uniquement, que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

a) Montrer :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - Nv_N.$$

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

c) Montrer que Nv_N tend vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, puis, par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

d) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20) On considère une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire Z , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y = k).$$

b) On suppose que Y admet une espérance. Montrer

$$\mathbb{P}(Z = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}.$$

La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?