HEC–ESSEC – Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2019

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent l'espérance et la variance. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Dans tout le corrigé, f est l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique orthonormée. On note f^* celui de matrice ${}^tA$, $s_f = f^* \circ f$ et $t_f = f \circ f^*$. Pour un endomorphisme u, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ est celui des matrices symétriques ; $S_n^+(\mathbb{R})$ est celui des matrices symétriques dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Les notations $S(\mathbb{R}^n)$ et $S^+(\mathbb{R}^n)$ désignent les ensembles correspondants d'endomorphismes symétriques. Enfin, $O_n(\mathbb{R}) = \{Q : {}^tQQ = I_n\}$.

Partie I – Un premier exemple

Pour $a \neq 1$, on considère $A = \dfrac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f associé à A et s_f associé à ${}^tAA$.

Corrigé – Partie I – Un premier exemple.

1. Rang, projection et réduction de f.

Les deux colonnes de A sont opposées, et la première est non nulle. Ainsi $\mathrm{rg}\, A = 1$. En posant $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $A = v{}^tw/(1-a)$ et ${}^twv = 1 - a$; d'où

$$A^2 = \frac{v({}^twv){}^tw}{(1-a)^2} = A.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{rg}\, A = 1, \qquad A^2 = A, \qquad f \text{ est un projecteur.}}$$

Pour $x = (x_1, x_2)$,

$$f(x) = \frac{x_1 - x_2}{1-a}(1, a).$$

Son image est donc $\mathrm{Vect}(1, a)$ et son noyau est $\mathrm{Vect}(1, 1)$. Les vecteurs $(1, a)$ et $(1, 1)$ sont indépendants puisque $a \neq 1$. Le premier est fixé par f et le second est annulé par f. Ils constituent une base de vecteurs propres, et

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}, \quad \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}, \quad E_0(f) = \mathrm{Vect}(1, 1), \quad E_1(f) = \mathrm{Vect}(1, a).}$$

2. Réduction de s_f.

Un produit matriciel donne

$$\boxed{M = {}^tAA = \frac{1 + a^2}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Cette matrice est symétrique réelle ; le théorème spectral assure sa diagonalisabilité dans une base orthonormée. Posons $\kappa = (1+a^2)/(1-a)^2 > 0$. Le calcul sur les deux vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ donne

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0, \qquad M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 2\kappa\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs forment une base, donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(s_f) = \left\{0, \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}\right\}, \quad E_0(s_f) = \mathrm{Vect}(1,1), \quad E_{2\kappa}(s_f) = \mathrm{Vect}(1,-1).}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, s_f = \mathrm{Vect}(1,1).}$$

3. Quand M représente-t-elle un projecteur ?

La matrice $H = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ vérifie $H^2 = 2H$. Comme $M = \kappa H \neq 0$, on a $M^2 = 2\kappa M$; ainsi

$$M^2 = M \iff 2\kappa = 1 \iff 2(1+a^2) = (1-a)^2 \iff (a+1)^2 = 0.$$

Donc

$$\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur} \iff a = -1.}$$

Dans ce cas, $M = A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, et ce projecteur est orthogonal puisque ses image et noyau sont les droites orthogonales engendrées par $(1,-1)$ et $(1,1)$.

Partie II – Généralités

Dans $M_n(\mathbb{R})$, on étudie le produit scalaire $(A \mid B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ et les endomorphismes $s_f = f^* \circ f$, $t_f = f \circ f^*$. On compare ensuite un produit de nombres positifs ou nuls à une puissance de leur moyenne.

Corrigé – Partie II – Généralités.

4. Produit scalaire sur l'espace des matrices.

a) Le coefficient diagonal d'indice i de ${}^tAB$ est $\sum_{j=1}^n a_{ji}b_{ji}$. En sommant les coefficients diagonaux puis en renommant les indices,

$$\boxed{\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.}$$

b) Cette expression est linéaire en chaque matrice et symétrique par échange de A et B. De plus

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0,$$

et cette somme est nulle si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls. La forme est donc bilinéaire, symétrique et strictement positive sur les matrices non nulles :

$$\boxed{(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB) \text{ est un produit scalaire.}}$$

Sa norme associée est

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}.}$$

c) L'inégalité de Cauchy–Schwarz s'écrit

$$\boxed{|(A \mid B)| \leq \|A\|_2\|B\|_2.}$$

On l'applique à I_n et A : $(I_n \mid A) = \mathrm{Tr}\, A$ et $\|I_n\|_2^2 = n$. Après élévation au carré,

$$\boxed{(\mathrm{Tr}\, A)^2 \leq n\,\mathrm{Tr}({}^tAA).}$$

Par ailleurs $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ji}$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}({}^tAA) - \mathrm{Tr}(A^2) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(a_{ij} - a_{ji})^2 \\ &= \sum_{i<j}(a_{ij} - a_{ji})^2.\end{aligned}$$

La différence est nulle si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous les indices. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}({}^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R}).}$$

5. Matrice de f^* dans une base orthonormée.

a) La matrice P a pour colonnes les vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits dans la base canonique. La formule de changement de base est

$$\boxed{A' = P^{-1}AP, \qquad A = PA'P^{-1}.}$$

b) Le coefficient (i,j) de ${}^tPP$ est $\langle e'_i \mid e'_j\rangle = \delta_{ij}$ puisque la base est orthonormée. Donc ${}^tPP = I_n$. Comme P est inversible, on en déduit

$$\boxed{P^{-1} = {}^tP, \qquad P \in O_n(\mathbb{R}).}$$

c) La matrice de f^* dans $\mathcal{B}'$ est $P^{-1}{}^tAP = {}^tP{}^tAP$. Or $A' = {}^tPAP$, donc

$${}^tA' = {}^tP{}^tAP.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*) = {}^tA'.}$$

6. Réduction de s_f.

a) La règle de transposition d'un produit donne

$${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \sum_{i=1}^{n}(AX)_i^2.$$

Pour une matrice colonne, la norme $\|\cdot\|_2$ est donc la norme euclidienne usuelle, et

$$\boxed{{}^tX({}^tAA)X = \|AX\|_2^2.}$$

b) Si $f(x) = 0$, alors $s_f(x) = f^*(f(x)) = 0$. Réciproquement, si $s_f(x) = 0$, la question a) donne

$$0 = \langle x \mid s_f(x)\rangle = \|f(x)\|^2,$$

donc $f(x) = 0$. Les deux noyaux coïncident. Le théorème du rang, appliqué aux deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, donne ensuite

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, s_f, \qquad \mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}\, f.}$$

c) La matrice de s_f est symétrique :

$${}^t({}^tAA) = {}^tAA.$$

La base canonique étant orthonormée,

$$\boxed{s_f \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

d) Pour une valeur propre λ et un vecteur propre $x \neq 0$, on a

$$\lambda\|x\|^2 = \langle x \mid s_f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f), \quad \lambda \geq 0.}$$

e) Pour cette fin de question, on pose $r = \operatorname{rg} f$ et on suppose $1 \leq r \leq n-1$. Le théorème spectral fournit une base orthonormée de vecteurs propres de s_f. Le noyau a pour dimension $n-r$ par b) ; dans cette base, il y a donc exactement $n-r$ valeurs diagonales nulles et r valeurs strictement positives, comptées selon les dimensions propres. En plaçant d'abord les r vecteurs associés à ces valeurs positives, on obtient

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_i > 0.}$$

f) Pour $j > r$, $\varepsilon_j \in \operatorname{Ker} s_f = \operatorname{Ker} f$. Les $n-r$ dernières colonnes de la matrice de f dans $\mathcal{C}$ sont donc nulles :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.}$$

La base $\mathcal{C}$ étant orthonormée, la question 5 donne comme matrice de f^* la transposée de cette matrice. Le produit par blocs fournit alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En comparant à e),

$$\boxed{{}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D.}$$

7. Comparaison de s_f et t_f.

a) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, le calcul matriciel donne

$$\langle x \mid f^*(y) \rangle = \langle f(x) \mid y \rangle.$$

Ainsi $y \in \operatorname{Ker} f^*$ si et seulement si y est orthogonal à tous les vecteurs de $\operatorname{Im} f$; donc $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Par conséquent,

$$\dim \operatorname{Ker} f^* = n - \operatorname{rg} f, \qquad \operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f.$$

Comme ${}^t({}^tA) = A$, on a $(f^*)^* = f$; ainsi $s_{f^*} = f \circ f^* = t_f$ et $t_{f^*} = f^* \circ f = s_f$. En appliquant la question 6.b à f^*, on a donc aussi $\operatorname{rg}(t_f) = \operatorname{rg} f^*$. On obtient donc, puis on applique le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}(s_f) = \operatorname{rg}(t_f) = \operatorname{rg} f, \qquad \dim \operatorname{Ker}(s_f) = \dim \operatorname{Ker}(t_f).}$$

b) Soit $x \neq 0$ tel que $s_f(x) = \lambda x$, avec $\lambda > 0$. Si $f(x) = 0$, on aurait $s_f(x) = 0$, donc $\lambda x = 0$, ce qui est impossible. Par associativité,

$$t_f(f(x)) = f(f^*(f(x))) = f(s_f(x)) = \lambda f(x).$$

Ainsi

$$\boxed{f(x) \neq 0, \qquad f(x) \in E_\lambda(t_f), \qquad \lambda \in \operatorname{Sp}(t_f).}$$

L'application linéaire $E_\lambda(s_f) \to E_\lambda(t_f)$ définie par $x \mapsto f(x)$ est injective : si son image est nulle, $\lambda x = s_f(x) = 0$, donc $x = 0$. Une application linéaire injective entre espaces de dimension finie donne l'inégalité

$$\boxed{\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(t_f).}$$

c) La matrice $A\,{}^tA$ est symétrique réelle. Le théorème spectral fournit donc une base orthonormée de vecteurs propres de t_f ; ses valeurs propres sont positives ou nulles par la question 6 appliquée à f^*. Pour les valeurs strictement positives, b) donne une inclusion des spectres et une inégalité des dimensions propres. En échangeant f et f^*, le même raisonnement donne l'inclusion et l'inégalité réciproques. Les valeurs propres strictement positives sont donc les mêmes, avec les mêmes dimensions propres. Pour la valeur 0, a) donne l'égalité des dimensions des noyaux : elle est présente dans les deux spectres, ou absente des deux. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(s_f) = \mathrm{Sp}(t_f), \qquad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f), \quad \dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(t_f).}$$

d) Choisissons des matrices orthogonales P, Q dont les colonnes sont des bases orthonormées de vecteurs propres de s_f, t_f, respectivement. La question c) permet de ranger les valeurs propres dans le même ordre, en les répétant selon les dimensions propres. Pour la même matrice diagonale Λ, on a donc

$$ {}^tAA = P\Lambda\,{}^tP, \qquad A\,{}^tA = Q\Lambda\,{}^tQ.$$

Posons $\Omega = Q\,{}^tP$, produit de deux matrices orthogonales. Alors

$$\Omega({}^tAA){}^t\Omega = Q\,{}^tP(P\Lambda\,{}^tP)P\,{}^tQ = Q\Lambda\,{}^tQ = A\,{}^tA.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\Omega = Q\,{}^tP \in O_n(\mathbb{R}), \qquad A\,{}^tA = \Omega({}^tAA){}^t\Omega.}$$

8. Maximum d'un produit et inégalité sur les valeurs propres.

a) L'application $\psi(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ est linéaire, donc continue. L'ensemble $\psi^{-1}(\{1\})$ est fermé, et $W = V \cap \psi^{-1}(\{1\})$ est fermé puisque V l'est aussi. Pour $x \in W$, chaque coordonnée vérifie $0 \leq x_i \leq 1$, donc $x_i^2 \leq x_i$. Ainsi

$$\|x\|^2 = \sum_i x_i^2 \leq \sum_i x_i = 1.$$

On conclut

$$\boxed{W \text{ est une partie fermée bornée de } \mathbb{R}^n.}$$

b) Le point $(1/n, \ldots, 1/n)$ appartient à W, donc W est non vide. La fonction $\varphi(x) = \prod_i x_i$ est polynomiale, donc continue. Le théorème des bornes atteintes assure qu'elle atteint son maximum sur la partie fermée bornée W :

$$\boxed{\exists x^* \in W, \quad M = \varphi(x^*) = \max_{x \in W} \varphi(x).}$$

c) Pour $x \in V \setminus U$, les coordonnées sont positives ou nulles et au moins l'une d'elles est nulle. Donc

$$\boxed{\forall x \in V \setminus U, \quad \varphi(x) = 0.}$$

d) Au point $(1/n, \ldots, 1/n)$, le produit vaut $1/n^n > 0$. Ainsi $M > 0$ et un point de maximum ne peut pas appartenir à $V \setminus U$, où le produit est nul. Il appartient donc à $W \cap U$, et

$$\boxed{M = \max_{\substack{x \in U \\ \sum_i x_i = 1}} \varphi(x).}$$

e) Soit $x^* \in W \cap U$ un point de maximum. Fixons deux indices distincts i, j, et posons $s = x_i^* + x_j^* > 0$ et $C = \prod_{k \neq i,j} x_k^* > 0$ (le produit vide vaut 1 lorsque $n = 2$). Si l'on garde les autres coordonnées et que l'on remplace ces deux coordonnées par t et $s - t$, avec $0 < t < s$, le produit est la fonction d'une seule variable

$$q(t) = Ct(s-t) = C\left(\frac{s^2}{4} - \left(t - \frac{s}{2}\right)^2\right).$$

Elle atteint son maximum unique pour $t = s/2$. Si $x_i^* \neq x_j^*$, leur remplacement par la moyenne $s/2$ augmente donc strictement le produit, tout en gardant des coordonnées strictement positives de somme 1. Ce serait contraire à la maximalité de x^*. Ainsi toutes les coordonnées de x^* sont égales ; leur somme étant 1, elles valent $1/n$. Réciproquement, ce point appartient à $W \cap U$, d'où

$$\boxed{M = \frac{1}{n^n}, \qquad \text{maximum atteint uniquement en } (1/n, \dots, 1/n).}$$

f) Le théorème spectral diagonalise S dans une base orthonormée, avec la liste étendue $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de valeurs propres positives ou nulles. La trace, invariante par changement de base, vaut $T = \operatorname{Tr} S = \sum_i \mu_i \geq 0$. Si $T > 0$, les nombres $x_i = \mu_i / T$ appartiennent à W. La question e) donne

$$\prod_{i=1}^n \mu_i = T^n \prod_{i=1}^n x_i \leq \frac{T^n}{n^n}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si tous les x_i valent $1/n$, donc si et seulement si $\mu_1 = \cdots = \mu_n = T/n$. Si $T = 0$, la somme de nombres positifs ou nuls μ_i est nulle ; ils sont donc tous nuls. Alors $S = 0$ par diagonalisation, et l'égalité vaut également. Enfin, une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont le même réel c est égale à cI_n, en utilisant sa diagonalisation. Ainsi, cas nul inclus,

$$\boxed{\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\operatorname{Tr} S}{n}\right)^n, \qquad \text{égalité} \iff S = cI_n \text{ avec } c \geq 0.}$$

g) La matrice $S_x = xI_n + {}^tAA$ est symétrique. Dans une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$, elle a pour valeurs propres $x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_n$. Elles sont positives ou nulles pour $x \geq 0$, donc f) s'applique. Sa trace vaut $nx + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i) &\leq \left(\frac{\operatorname{Tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n \\ &= \left(\frac{nx + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}\right)^n \qquad (x \geq 0). \end{aligned}}$$

Partie III – Projecteurs et symétries

Étude des valeurs propres de ${}^tAA$ lorsque f est un projecteur ou une symétrie, puis caractérisation de l'égalité dans une inégalité portant sur ces valeurs propres.

Corrigé – Partie III – Projecteurs et symétries.

9. Cas d'un projecteur de rang r.

a) Puisque $f^2 = f$, tout vecteur x se décompose en

$$x = f(x) + (x - f(x)),$$

avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Si $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, il existe z tel que $y = f(z)$, donc $f(y) = f^2(z) = f(z) = y$; comme $f(y) = 0$, on a $y = 0$. Ainsi $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Dans une base formée d'une base de l'image puis d'une base du noyau, la matrice est $\operatorname{diag}(I_r, 0)$. Sa trace vaut r. La trace étant indépendante de la base,

$$\boxed{\text{Toute matrice représentant } f \text{ a pour trace } r.}$$

b) Dans la base orthonormale $\mathcal{C}$ de la question 6, la matrice de f est $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$. Son carré vaut $\begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3A_1 & 0 \end{pmatrix}$. L'identité $f^2 = f$ et la question a) donnent donc

$$A_1^2 = A_1, \qquad \operatorname{tr}(A_1) = r.$$

La matrice A_1, de taille r, représente elle-même un projecteur. Le résultat a), appliqué à cet espace de dimension r, montre que sa trace est son rang. Ainsi $\operatorname{rg}(A_1) = r$: A_1 est inversible. En multipliant $A_1^2 = A_1$ par son inverse, on obtient

$$\boxed{A_1^2 = A_1, \qquad \operatorname{tr}(A_1) = r, \qquad A_1 = I_r.}$$

c) La relation de la question 6 devient

$$D = {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = I_r + {}^tA_3A_3.$$

Pour chaque indice $i \in [\![1, r]\!]$, le coefficient diagonal de D est

$$\lambda_i = 1 + \sum_{j=1}^{n-r} (A_3)_{j,i}^2 \geq 1.$$

Ce sont exactement les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$. Les $n - r$ autres valeurs propres sont nulles. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda_i \geq 1 \quad (1 \leq i \leq r), \\ \operatorname{tr}({}^tAA) = r + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-r} (A_3)_{j,i}^2 \geq r. \end{array}}$$

d) Si f est un projecteur orthogonal, il est symétrique. Dans la base orthonormale $\mathcal{C}$, sa matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$ est donc symétrique, ce qui impose $A_3 = 0$. La formule

de c) donne alors la trace r. Réciproquement, pour un projecteur quelconque de rang r, l'égalité de trace impose la nullité de tous les coefficients de A_3. Sa matrice dans $\mathcal{C}$ est donc $\mathrm{diag}(I_r, 0)$: c'est le projecteur sur le sous-espace engendré par les r premiers vecteurs de cette base orthonormale, parallèlement à son orthogonal. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Tous les projecteurs orthogonaux de rang } r \text{ vérifient l'égalité,}\\ \mathrm{tr}({}^tAA) = r \iff f \text{ est un projecteur orthogonal} \quad (f^2 = f).\end{array}}$$

10. Cas d'une symétrie.

a) L'identité $f^2 = \mathrm{Id}$ donne $A^2 = I_n$. Ainsi A est inversible et $A^{-1} = A$; de même $({}^tA)^{-1} = {}^tA$. On en déduit

$$\boxed{{}^tAA \text{ est inversible,} \qquad ({}^tAA)^{-1} = A^{-1}({}^tA)^{-1} = A\,{}^tA.}$$

b) Posons $S = {}^tAA$ et $T = A\,{}^tA = S^{-1}$. La question 6 et l'inversibilité assurent que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives. Pour $\lambda > 0$, on a

$$SX = \lambda X \iff S^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X,$$

donc $E_\lambda(S) = E_{1/\lambda}(T)$. La question 7 assure que S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes dimensions d'espaces propres pour chacune d'elles. Ainsi $1/\lambda$ est une valeur propre de S dès que λ l'est, et

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda \in \mathrm{Sp}(S) \implies \dfrac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(S),\\ \dim E_\lambda(S) = \dim E_{1/\lambda}(S).\end{array}}$$

c) Pour tout $x > 0$,

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0.$$

L'égalité est équivalente à $\sqrt{x} = 1$, donc à $x = 1$. Ainsi

$$\boxed{\sqrt{x} + \sqrt{1/x} \geq 2, \qquad \sqrt{x} + \sqrt{1/x} = 2 \iff x = 1.}$$

d) Posons $s_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, pour la liste étendue de l'énoncé. D'après b), cette liste est inchangée, à l'ordre près, lorsqu'on remplace chaque λ_i par son inverse. Il en est de même pour la liste des s_i. En multipliant les termes de ces deux listes,

$$\prod_{i=1}^{n} s_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i},$$

ce qui donne $(\prod_i s_i)^2 = 1$. Ce produit étant strictement positif,

$$\prod_{i=1}^{n} s_i = 1.$$

Notons $H = \prod_{i=1}^{n}(s_i + 1) > 0$. En utilisant ce produit égal à 1,

$$H^2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{(s_i+1)^2}{s_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(s_i + 2 + \frac{1}{s_i}\right).$$

La question c), appliquée à $x = \lambda_i$, donne $s_i + 1/s_i \geq 2$. Chaque facteur est donc au moins égal à 4, d'où $H^2 \geq 4^n$. En prenant les racines carrées positives,

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} = 1, \qquad \prod_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} + 1) \geq 2^n.}$$

e) Dans la preuve précédente, tous les facteurs $s_i + 2 + 1/s_i$ sont au moins égaux à 4. Leur produit est 4^n si et seulement s'ils valent tous 4. D'après c), cela équivaut à $\lambda_i = 1$ pour tous les indices. Comme $S = {}^tAA$ est symétrique et diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont égales à 1 si et seulement si $S = I_n$. Ainsi

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} + 1) = 2^n \iff {}^tAA = I_n, \\ \text{soit exactement } A \text{ orthogonale.}}$$

Pour relier cela aux sous-espaces propres de la symétrie, on observe que tout vecteur x s'écrit

$$x = x_+ + x_-, \qquad x_+ = \frac{x + f(x)}{2} \in E_1(f), \quad x_- = \frac{x - f(x)}{2} \in E_{-1}(f).$$

L'intersection de ces deux sous-espaces est nulle, car $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ impliquent $x = 0$. Si A est orthogonale, elle préserve les produits scalaires. Pour $v \in E_1(f)$ et $w \in E_{-1}(f)$,

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, -w \rangle = -\langle v, w \rangle,$$

donc ces sous-espaces sont orthogonaux. Réciproquement, s'ils sont orthogonaux, la décomposition précédente donne

$$\|f(x)\|^2 = \|x_+ - x_-\|^2 = \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 = \|x\|^2.$$

Par la formule $2\langle f(x), f(y) \rangle = \|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2$, on en déduit que f préserve les produits scalaires, donc ${}^tAA = I_n$. Finalement,

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu exactement lorsque } f \text{ est une symétrie orthogonale.}}$$

Partie IV – Racine carrée et décomposition polaire

On suppose A inversible. On construit l'unique racine carrée symétrique à valeurs propres positives de ${}^tAA$, puis une factorisation $A = \Omega S$ avec Ω orthogonale et S symétrique à valeurs propres positives.

Corrigé – Partie IV – Racine carrée et décomposition polaire.

11. Construction d'une racine carrée de s_f.

L'endomorphisme s_f est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles, par la question 6. Son noyau est celui de f, donc réduit à $\{0\}$ puisque A est inversible. Ses valeurs propres sont ainsi toutes strictement positives. Le théorème spectral fournit une base orthonormale $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$, avec $\lambda_i > 0$. Prescrire les

images d'une base définit un unique endomorphisme v. On pose

$$v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i.$$

Sa matrice dans cette base orthonormale est $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Elle est symétrique et tous ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Ainsi $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et v est inversible. Enfin, $v^2(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i = s_f(\varepsilon_i)$ pour tous les vecteurs de la base, donc

$$\boxed{v \in S^+(\mathbb{R}^n), \qquad v^2 = s_f, \qquad v \text{ inversible.}}$$

12. Espaces propres de toute racine carrée symétrique positive.

Soit $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ tel que $w^2 = s_f$. Ses valeurs propres sont positives ou nulles. Aucune n'est nulle : si $w(x) = 0$ pour $x \neq 0$, alors $s_f(x) = w^2(x) = 0$, ce qui contredit l'inversibilité de s_f. Pour $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$ et $x \in E_\mu(w)$,

$$s_f(x) = w^2(x) = \mu^2 x,$$

d'où $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$.

Pour l'inclusion inverse, choisissons une base orthonormale $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ de vecteurs propres de w, avec $w(\eta_j) = \nu_j\eta_j$ et $\nu_j > 0$. Si $x \in E_{\mu^2}(s_f)$, écrivons $x = \sum_{j=1}^n b_j\eta_j$. L'égalité $w^2(x) = s_f(x) = \mu^2 x$ donne

$$\sum_{j=1}^n (\nu_j^2 - \mu^2) b_j \eta_j = 0.$$

Par liberté de la base, $(\nu_j^2 - \mu^2)b_j = 0$ pour chaque j. Comme ν_j et μ sont positifs, b_j ne peut être non nul que si $\nu_j = \mu$. On obtient donc $w(x) = \mu x$. Ainsi

$$\boxed{\forall \mu \in \mathrm{Sp}(w), \quad E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f).}$$

Cette inclusion montre que μ^2 est une valeur propre de s_f dès que μ est une valeur propre de w. Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)$, prenons un vecteur non nul $x \in E_\lambda(s_f)$ et développons-le dans la même base. Au moins un coefficient b_j est non nul ; l'égalité $w^2(x) = \lambda x$ impose alors $\nu_j^2 = \lambda$, donc $\sqrt{\lambda} = \nu_j \in \mathrm{Sp}(w)$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)\}.}$$

13. Unicité de la racine carrée.

La question 11 a établi l'existence d'un endomorphisme v convenant. Si w est un autre endomorphisme convenant, les égalités d'espaces propres de la question 12 donnent

$$w(x) = \sqrt{\lambda}\, x \qquad \text{pour tout } x \in E_\lambda(s_f).$$

En particulier, pour la base de la question 11, $w(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i = v(\varepsilon_i)$. Les deux endomorphismes coïncident sur une base, donc $w = v$. De plus, le même raisonnement vaut pour toute base orthonormale de vecteurs propres de s_f, indépendamment du choix fait à la question 11. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists! v \in S^+(\mathbb{R}^n), \quad v^2 = s_f, \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}), \\ \text{dans toute telle base } \mathcal{C}.\end{array}}$$

14. Racine carrée matricielle de ${}^tAA$.

Soit S la matrice de l'endomorphisme v de la question 13 dans la base canonique. Comme cette base est orthonormale, S est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives. De plus, $S^2 = {}^tAA$. Réciproquement, toute matrice symétrique à valeurs propres positives ou nulles dont le carré vaut ${}^tAA$ définit un endomorphisme répondant à la question 13. L'unicité de cet endomorphisme donne donc celle de sa matrice. Ainsi

$$\boxed{\exists! S \in S_n^+(\mathbb{R}), \quad S^2 = {}^tAA, \qquad S = \sqrt{{}^tAA}.}$$

La matrice S est inversible, puisque toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

15. Décomposition polaire.

Posons $S = \sqrt{{}^tAA}$ et $\Omega = AS^{-1}$. La matrice S est symétrique, donc S^{-1} est symétrique. Ainsi

$${}^t\Omega\Omega = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

La matrice Ω est donc orthogonale et $A = \Omega S$. Cela donne l'existence du couple demandé. Supposons maintenant $A = \Omega' S'$ avec Ω' orthogonale et $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors

$${}^tAA = {}^tS'{}^t\Omega'\Omega' S' = (S')^2.$$

L'unicité de la racine carrée de la question 14 donne $S' = S$. Cette matrice étant inversible, on en déduit $\Omega' = AS^{-1} = \Omega$. Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists!(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}),\\ A = \Omega S,\\ S = \sqrt{{}^tAA}, \qquad \Omega = A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}.\end{array}}$$

Partie V – Distance aux matrices orthogonales

La norme $\|N\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tNN)}$ est inchangée par multiplication par une matrice orthogonale. On réduit ainsi le problème à une matrice diagonale à coefficients strictement positifs, puis on compare directement les distances et leurs cas d'égalité.

Corrigé – Partie V – Distance aux matrices orthogonales.

16. Existence de la distance $d(M)$.

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est non vide, car I_n est orthogonale. L'ensemble

$$\mathcal{D}_M = \{\|M - V\|_2 \mid V \in O_n(\mathbb{R})\}$$

est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$. Ses éléments sont positifs ou nuls, donc il est minoré par 0. La propriété de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ assure l'existence d'un réel $\inf \mathcal{D}_M$. Comme $\|M - I_n\|_2$ appartient à cet ensemble,

$$\boxed{d(M) \text{ est bien définie,} \qquad 0 \leq d(M) \leq \|M - I_n\|_2.}$$

L'existence de cette borne inférieure ne suppose pas, à ce stade, qu'elle soit atteinte.

17. Invariance par multiplication orthogonale.

Rappelons d'abord une identité de trace, vérifiée directement pour deux matrices carrées B, C de même taille :

$$\mathrm{Tr}(BC) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ji}b_{ij} = \mathrm{Tr}(CB).$$

Les sommes sont finies ; le changement d'ordre des indices est donc immédiat. Soit $R \in O_n(\mathbb{R})$. On a ${}^tRR = R{}^tR = I_n$. Pour toute matrice N,

$$\|RN\|_2^2 = \mathrm{Tr}({}^tN{}^tRRN) = \mathrm{Tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2.$$

Pour la multiplication à droite, l'identité de trace précédente donne

$$\begin{aligned}\|NR\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^tR{}^tNNR)\\ &= \mathrm{Tr}(R{}^tR{}^tNN) = \mathrm{Tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2.\end{aligned}$$

Toutes ces normes sont positives ou nulles, donc

$$\boxed{\|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.}$$

Le produit et l'inverse de matrices orthogonales sont orthogonaux. Les applications

$$\Phi : V \longmapsto VR^{-1}, \qquad \Psi : V \longmapsto R^{-1}V$$

envoient donc $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Leurs inverses respectifs sont $U \mapsto UR$ et $U \mapsto RU$, qui ont la même propriété. Ainsi

$$\boxed{\Phi, \Psi : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \text{ sont bijectives.}}$$

Pour $V \in O_n(\mathbb{R})$, l'invariance de la norme donne

$$\|RM - V\|_2 = \|R^{-1}(RM - V)\|_2 = \|M - R^{-1}V\|_2.$$

Lorsque V parcourt $O_n(\mathbb{R})$, $R^{-1}V$ parcourt le même ensemble ; les ensembles de distances sont donc égaux, puis leurs bornes inférieures aussi. De même,

$$\|MR - V\|_2 = \|(MR - V)R^{-1}\|_2 = \|M - VR^{-1}\|_2.$$

Par conséquent

$$\boxed{d(M) = d(RM) = d(MR).}$$

18. Réduction à la matrice diagonale D.

La décomposition polaire s'écrit $A = \Omega S$, avec Ω orthogonale. La question 17 donne donc $d(A) = d(S)$. Puisque $S = PD{}^tP$ et que $P, {}^tP$ sont orthogonales, on l'applique encore à gauche, puis à droite :

$$d(S) = d(PD{}^tP) = d(D{}^tP) = d(D).$$

Ainsi $\boxed{d(A) = d(D).}$

19. La partie symétrique d'une matrice orthogonale.

Soit $V \in O_n(\mathbb{R})$ et $W = (V + {}^tV)/2$.

a) Par transposition,

$${}^tW = \frac{1}{2}({}^tV + V) = W.$$

La matrice W est donc réelle symétrique. Le théorème spectral fournit une diagonalisation dans une base orthonormée ; en particulier,

$$\boxed{W \text{ est diagonalisable.}}$$

b) Pour un vecteur x de coordonnées X, le scalaire ${}^tXVX$ est égal à sa transposée, soit ${}^tX{}^tVX$. Il vient

$$\langle w(x) \mid x\rangle = {}^tXWX = \frac{1}{2}({}^tXVX + {}^tX{}^tVX) = {}^tXVX = \langle v(x) \mid x\rangle.$$

Comme V est orthogonale,

$$\|v(x)\|^2 = {}^tX{}^tVVX = {}^tXX = \|x\|^2,$$

donc $\|v(x)\| = \|x\|$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne alors

$$|\langle w(x) \mid x\rangle| = |\langle v(x) \mid x\rangle| \leq \|v(x)\|\,\|x\| = \|x\|^2.$$

Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle w(x) \mid x\rangle = \langle v(x) \mid x\rangle, & \|v(x)\| = \|x\|, \\ |\langle w(x) \mid x\rangle| \leq \|x\|^2, & \langle x - w(x) \mid x\rangle \geq 0. \end{array}}$$

c) La matrice $I_n - W$ est symétrique. Si θ est l'une de ses valeurs propres et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, alors

$$\theta\|x\|^2 = \langle x - w(x) \mid x\rangle \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, $\theta \geq 0$. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Toutes les valeurs propres de } I_n - W \\ \text{sont positives ou nulles.} \end{array}}$$

d) Appliquons la dernière inégalité de b) au vecteur canonique e_i :

$$\langle e_i - w(e_i) \mid e_i \rangle = 1 - w_{ii} \geq 0.$$

Donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 1 - w_{ii} \geq 0.}$

e) Si $W = I_n$, tous ses coefficients diagonaux valent 1. Réciproquement, supposons $w_{ii} = 1$ pour tout i. Alors

$$\mathrm{Tr}(I_n - W) = \sum_{i=1}^{n} (1 - w_{ii}) = 0.$$

Le théorème spectral donne $I_n - W = H \,\mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)\,{}^tH$, avec H orthogonale et $\theta_i \geq 0$ d'après c). L'identité de trace prouvée en 17 donne

$$\mathrm{Tr}(I_n - W) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)\,{}^tHH\big) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Cette somme de réels positifs ou nuls est nulle, donc chaque θ_i vaut 0. Ainsi $I_n - W = 0$, et

$$\boxed{(\forall i \in [\![1, n]\!],\ w_{ii} = 1) \iff W = I_n.}$$

20. Distance minimale et unicité.

Écrivons $D = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, avec $\delta_i > 0$.

a) Puisque D est symétrique et V orthogonale,

$$\begin{aligned} \|D - V\|_2^2 &= \mathrm{Tr}\big((D - {}^tV)(D - V)\big) \\ &= \mathrm{Tr}(D^2) - \mathrm{Tr}(DV) - \mathrm{Tr}({}^tVD) + n. \end{aligned}$$

Les deux traces croisées valent chacune $\sum_i \delta_i v_{ii}$. Or $w_{ii} = v_{ii}$, donc leur somme vaut $2\,\mathrm{Tr}(WD)$. D'autre part,

$$\|D - I_n\|_2^2 = \mathrm{Tr}(D^2) - 2\,\mathrm{Tr}(D) + n.$$

En soustrayant,

$$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\,\mathrm{Tr}\big((I_n - W)D\big).}$$

b) Le produit par une matrice diagonale donne

$$\mathrm{Tr}\big((I_n - W)D\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (1 - w_{ii}).$$

Chaque δ_i est strictement positif et chaque $1 - w_{ii}$ est positif ou nul par la question 19 d). Ainsi

$$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0.}$$

L'égalité est possible exactement lorsque $w_{ii} = 1$ pour tous les indices i, car aucun poids δ_i n'est nul.

c) Les distances étant positives ou nulles, b) montre que $\|D - V\|_2 \geq \|D - I_n\|_2$ pour toute matrice orthogonale V. Comme I_n est elle-même orthogonale, cette borne est atteinte :

$$d(D) = \|D - I_n\|_2.$$

La question 18 donne $d(A) = d(D)$. Enfin, $S = PD{}^tP$ et $I_n = PI_n{}^tP$, donc l'invariance de la norme de la question 17 fournit

$$\|S - I_n\|_2 = \|P(D - I_n){}^tP\|_2 = \|D - I_n\|_2.$$

Par définition de la décomposition polaire, $S = \sqrt{{}^tAA}$. Ainsi

$$\boxed{d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\|\sqrt{{}^tAA} - I_n\right\|_2.}$$

Pour l'unicité, supposons $\|D - V\|_2 = d(D)$. Le cas d'égalité de b) impose $w_{ii} = 1$ pour tout i, et la question 19 e) donne $W = I_n$. Comme $w_{ii} = v_{ii}$, tous les v_{ii} valent 1. Les colonnes de V sont de norme euclidienne 1, puisque ${}^tVV = I_n$. Pour chaque colonne j,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}^2 = v_{jj}^2 + \sum_{i \neq j} v_{ij}^2 = 1 + \sum_{i \neq j} v_{ij}^2.$$

Chaque terme de cette dernière somme est positif ou nul : tous les coefficients hors diagonale sont donc nuls. Il s'ensuit $V = I_n$. Réciproquement, I_n atteint bien le minimum, d'où

$$\boxed{I_n \text{ est l'unique matrice orthogonale la plus proche de } D.}$$

En particulier, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$, les δ_i sont les $\sqrt{\lambda_i}$ et

$$\boxed{d(A)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} - 1)^2.}$$

La matrice orthogonale Ω de la décomposition polaire est elle-même la plus proche de A : $\|A - \Omega\|_2 = \|\Omega(S - I_n)\|_2 = d(A)$. Elle est unique également. En effet, pour $R \in O_n(\mathbb{R})$, posons $U = {}^tP{}^t\Omega RP \in O_n(\mathbb{R})$. Les multiplications orthogonales donnent

$$\|A - R\|_2 = \|{}^tP{}^t\Omega(A - R)P\|_2 = \|D - U\|_2.$$

Si R atteint $d(A) = d(D)$, l'unicité précédente impose $U = I_n$, puis $R = \Omega$. Ainsi

$$\boxed{\Omega \text{ est l'unique matrice orthogonale la plus proche de } A.}$$