

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2019

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Un premier exemple	2
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction.</i>	2
2	Généralités	2
	<i>Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; applications linéaires ; réduction.</i>	2
3	Étude de deux cas particuliers	4
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire.</i>	4
4	Décomposition polaire	4
	<i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires.</i>	4
5	Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$	5
	<i>Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction ; applications linéaires.</i>	5

Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices tAA , où $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, tA désigne sa transposée, $\text{tr } A$ sa trace, I_n la matrice unité et Id l'identité de $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme canoniquement associé à A est noté f , celui associé à tA est noté f^* , et $s_f = f^* \circ f$ est associé à tAA . Enfin,

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}), \quad E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Pour une matrice diagonalisable, une *liste étendue des valeurs propres* répète chaque valeur propre λ autant de fois que $\dim E_\lambda(A)$. On note $S(\mathbb{R}^n)$ et $S_n(\mathbb{R})$ les endomorphismes et matrices symétriques, et $S^+(\mathbb{R}^n)$, $S_n^+(\mathbb{R})$ ceux dont les valeurs propres sont positives ou nulles. L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Pour $r \in [1, n-1]$, on utilisera les règles usuelles de produit et de transposition par blocs pour des matrices découpées selon r et $n-r$.

1 Un premier exemple

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$A = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1. Quel est le rang de A ? Calculer A^2 . Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?
2. Calculer $M = {}^tAA$. La matrice M est-elle diagonalisable ? Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker}(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f ?
3. À quelle condition nécessaire et suffisante M est-elle la matrice d'un projecteur ?

2 Généralités

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; applications linéaires ; réduction.

4. Produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

- a) Soient $A = [a_{ij}]_{(i,j) \in [1,n]^2}$ et $B = [b_{ij}]_{(i,j) \in [1,n]^2}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $\text{tr}({}^tAB)$ en fonction des coefficients de A et B .
- b) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on note $(A | B) = \text{tr}({}^tAB)$ et $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$.
- c) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis vérifier que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), (\text{tr } A)^2 \leq \text{tr}({}^tAA)$. Montrer également que $\text{tr}(A^2) = \text{tr}({}^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$.

5. **Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée.** Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}'$, et A' la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

- a) Rappeler la relation liant A et A' .
- b) Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale.
- c) En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}'$.

6. **Réduction de s_f .**

- a) Vérifier que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|_2^2$.
- b) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker}(s_f)$ et $\text{rg}(s_f) = \text{rg } f$.
- c) Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
- d) Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

On note $r = \text{rg } f$ et l'on suppose pour la fin de cette question que $1 \leq r \leq n - 1$.

- e) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est

$$\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où D est diagonale d'ordre r , de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ strictement positive.

- f) Montrer que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$, $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$, et vérifier que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$.

7. **Étude des valeurs propres de A^tA .** On note $t_f = f \circ f^*$, endomorphisme canoniquement associé à A^tA .

- a) Montrer que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(t_f)$ et $\dim(\text{Ker}(s_f)) = \dim(\text{Ker}(t_f))$.
- b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de t_f et que $f(x)$ en est un vecteur propre associé. Montrer alors $\dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(t_f))$.
- c) Montrer que t_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ , $\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(t_f))$.
- d) En déduire qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tA = \Omega({}^tAA)\Omega$.

8. **Une inégalité.** On note $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n\}$, $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n\}$, et $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$. On admet que V est fermée et U ouverte.

- a) Montrer que $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.
- b) En déduire que φ admet un maximum global, noté M , sur W .
- c) Calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$.
- d) En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$.
- e) Déterminer M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.

- f) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres sont positives ou nulles, et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une liste étendue de ses valeurs propres. Dédurre de ce qui précède que $\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{tr } S}{n}\right)^n$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
- g) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de tAA et $\Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i)$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\text{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

3 Étude de deux cas particuliers

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A .

9. On suppose que f est un projecteur de rang $r \in [1, n-1]$.
 - a) Montrer que la trace de toute matrice représentant f est r .
 - b) Avec les notations de la question 6, vérifier que $A_1^2 = A_1$ et $\text{tr}(A_1) = r$, puis en déduire la matrice A_1 .
 - c) Montrer alors que les valeurs propres non nulles de tAA sont supérieures ou égales à 1, et que $\text{tr}({}^tAA) \geq r$.
 - d) Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $\text{tr}({}^tAA) = r$?
10. On suppose que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \text{Id}$.
 - a) Justifier que tAA est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et tA .
 - b) Montrer que si λ est une valeur propre de tAA , alors $1/\lambda$ l'est aussi et que $\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA)$.
 - c) Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{1/x} \geq 2$, puis établir l'équivalence $\sqrt{x} + \sqrt{1/x} = 2 \iff x = 1$.
 - d) Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une liste étendue des valeurs propres de tAA , montrer que $\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i + 1} \geq 2^n$.
 - e) Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i + 1} = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire où $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

4 Décomposition polaire

Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$, f désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A , et A est supposée inversible.

11. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et des réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$. On pose $v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

12. Soit w un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $w^2 = s_f$. Montrer que, pour toute valeur propre μ de w , $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$, puis que $E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f)$ et $\text{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f)\}$.
13. En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$, et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v est diagonale.
14. En déduire qu'il existe une unique matrice, notée $\sqrt{{}^tAA}$, appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tAA$.
15. Vérifier que $A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$. C'est la décomposition polaire de A .

5 Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction ; applications linéaires.

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $d(M)$ la distance de M à $O_n(\mathbb{R})$, définie par

$$d(M) = \inf_{V \in O_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

16. Justifier que $d(M)$ est bien définie.
17. Soit $R \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $N \in M_n(\mathbb{R})$, $\|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2$. Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $O_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. En déduire $d(M) = d(RM) = d(MR)$.
18. On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A . On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$. Vérifier que $d(A) = d(D)$.
19. Soit $V \in O_n(\mathbb{R})$. On note $W = \frac{1}{2}(V + {}^tV)$, et v, w les endomorphismes canoniquement associés à V, W .
 - a) Justifier que W est diagonalisable.
 - b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $\langle w(x) \mid x \rangle = \langle v(x) \mid x \rangle$ et $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que $|\langle w(x) \mid x \rangle| \leq \|x\|^2$ et $\langle x - w(x) \mid x \rangle \geq 0$.
 - c) Montrer que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles.
 - d) Si $W = [w_{ij}]_{(i,j) \in [1,n]^2}$, montrer aussi que, pour tout $i \in [1, n]$, $1 - w_{ii} \geq 0$.
 - e) Montrer que, pour tout $i \in [1, n]$, $w_{ii} = 1$ si et seulement si $W = I_n$.
20. On conserve les notations des questions 18 et 19.
 - a) Montrer que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \text{tr}((I_n - W)D)$.
 - b) En déduire que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0$.
 - c) Montrer alors que $d(A) = \|D - I_n\|_2 = \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2$, et que I_n est l'unique élément V de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $d(D) = \|D - V\|_2$.