

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2020

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1 – Polynômes de Tchebychev

Exercice 1 – Polynômes de Tchebychev

$T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$; produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Premières propriétés.

a) $T_2 = 2X \cdot X - 1$ et $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X$:

$$T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X.$$

b) Montrons par récurrence double que, pour tout $n \geq 1$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} . C'est vrai pour $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. Si c'est vrai aux rangs $n-1$ et n (avec $n \geq 2$), alors $2XT_n$ est de degré $n+1$, de coefficient dominant $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, et $\deg T_{n-1} = n-1 < n+1$; donc $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg T_n = n \quad (\text{coefficient dominant } 2^{n-1}).$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts ($\deg T_k = k$, y compris pour $k=0$) : elle est échelonnée en degré, donc libre. Elle comporte $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments.

$$(T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

2. Lien avec le cosinus.

a) On applique la formule rappelée avec $a = (n+1)x$ et $b = x$: $a+b = (n+2)x$ et $a-b = nx$, donc

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x).$$

b) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et raisonnons par récurrence double sur n . On a $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0 \cdot x)$ et $T_1(\cos x) = \cos x$. Si $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ et $T_{n+1}(\cos x) = \cos((n+1)x)$, alors, d'après la relation de récurrence et a),

$$T_{n+2}(\cos x) = 2\cos(x)T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx),$$

$$T_{n+2}(\cos x) = \cos((n+2)x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. Un produit scalaire.

- a) La fonction $g : t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1, 1[$. La fonction polynomiale PQ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée par un réel M (théorème des bornes atteintes). Pour $t \in [0, 1[$, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t} \geq \sqrt{1-t}$, d'où

$$0 \leq |g(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}}.$$

Or, pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$: l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 |g|$ converge. De même en -1 (avec $\sqrt{1-t^2} \geq \sqrt{1+t}$ sur $] -1, 0[$). L'intégrale est absolument convergente donc

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge.}$$

- b) D'après a), l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est bien définie.

- *Symétrie* : $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, donc $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.
- *Linéarité à gauche* : pour $\mu \in \mathbb{R}$, par linéarité des intégrales convergentes, $\varphi(P_1 + \mu P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \mu \varphi(P_2, Q)$; par symétrie, φ est bilinéaire.
- *Positivité* : $\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $\varphi(P, P) \geq 0$.
- *Caractère défini* : si $\varphi(P, P) = 0$, la fonction $h : t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$, d'intégrale nulle. Si l'on avait $h(t_0) > 0$ pour un $t_0 \in] -1, 1[$, par continuité $h \geq \frac{h(t_0)}{2}$ sur un segment $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset] -1, 1[$ avec $\eta > 0$, et l'intégrale serait $\geq \eta h(t_0) > 0$. Donc $h = 0$ sur $] -1, 1[$, et P admet une infinité de racines : $P = 0$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].$$

- c) Soit $n \neq m$. Par la formule rappelée, $\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x))$, avec $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$. Pour k entier non nul, $\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0$. Donc

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

- d) La fonction $x \mapsto \cos x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement décroissante de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$. Pour $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$ donc $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$. Le changement de variable $t = \cos x$ montre que l'intégrale $\langle T_n, T_m \rangle$ est de même nature que (donc convergente comme)

$$\int_\pi^0 \frac{T_n(\cos x)T_m(\cos x)}{\sin x} (-\sin x) dx = \int_0^\pi T_n(\cos x)T_m(\cos x) dx,$$

et lui est égale. D'après 2.b et c) :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx, \quad \boxed{\langle T_n, T_m \rangle = 0 \quad (n \neq m).}$$

- e) De même, $\|T_n\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(nx) dx$. Pour $n = 0$, on obtient π . Pour $n \geq 1$, $\cos^2(nx) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$ et $\int_0^\pi \cos(2nx) dx = 0$, d'où

$$\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad (n \geq 1), \quad \|T_0\|^2 = \pi.$$

- f) La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est orthogonale (d)) ; en normalisant, la famille

$$\left(\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \right)$$

est orthonormée, donc libre, et compte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].$$

4. Distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Notons $e_k = \frac{T_k}{\|T_k\|}$; $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ (question 3.f).

- a) Dans une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur sont ses produits scalaires avec les vecteurs de la base : $X^n = \sum_{k=0}^n \langle X^n, e_k \rangle e_k$. Comme $\langle X^n, e_k \rangle e_k = \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k$,

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k.$$

- b) Posons $p = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, de sorte que $X^n - p = \frac{\langle X^n, T_n \rangle}{\|T_n\|^2} T_n$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$ et $T_n \perp T_k$ pour $k < n$, $X^n - p$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $p - P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et par le théorème de Pythagore,

$$\|X^n - P\|^2 = \|X^n - p\|^2 + \|p - P\|^2 \geq \|X^n - p\|^2,$$

avec égalité pour $P = p$. La borne inférieure est donc atteinte en p :

$$d_n = \|X^n - p\| = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|^2} \|T_n\|, \quad d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}.$$

- c) $T_2 = 2X^2 - 1$ donne $X^2 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$, donc $\langle X^2, T_2 \rangle = \frac{1}{2}\|T_2\|^2 + \frac{1}{2}\langle T_0, T_2 \rangle = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi

$$d_2 = \frac{\pi/4}{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{\pi}}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Exercice 2 – Ordre de convergence d'une série

Exercice 2 – Restes successifs

$$R_{1,n} = \sum_{k>n} u_k, R_{p,n} = \sum_{k>n} R_{p-1,k}; \text{ exemples } u_n = \frac{1}{n^\alpha}, u_n = \frac{1}{n^n}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Corrigé – Exercice 2.

1. Cas $u_n = 1/n^\alpha$.

a) D'après le critère de Riemann,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

b) Comme $\alpha > 1 > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $k \geq 2$:

- pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$; en intégrant sur $[k, k+1]$ (de longueur 1), $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$;
- pour $t \in [k-1, k]$ (inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ car $k \geq 2$), $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$, d'où $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$.

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

c) Soit $n \geq 1$ et $N > n$. En sommant b) pour $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$ (on a bien $k \geq 2$) et par la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour $0 < a < b$, $\int_a^b \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right)$. Comme $\alpha - 1 > 0$, $\frac{1}{b^{\alpha-1}} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$; en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

d) En multipliant par $(\alpha-1)n^{\alpha-1} > 0$:

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1} R_{1,n} \leq 1.$$

Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, le membre de gauche tend vers 1 ; par encadrement, $(\alpha-1)n^{\alpha-1} R_{1,n} \rightarrow 1$:

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

e) Les $R_{1,n}$ sont positifs et, d'après d), $R_{1,n} \sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Par comparaison de séries à termes positifs et le critère de Riemann, $\sum R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha-1 > 1$.

$$\sum u_n \text{ converge à l'ordre 2} \iff \alpha > 2.$$

- f) On peut conjecturer que $R_{p,n} \sim \frac{C_p}{n^{\alpha-p}}$ (avec $C_p > 0$) tant que $\alpha > p$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge à l'ordre } p \text{ si et seulement si } \alpha > p.}$$

Elle converge donc exactement aux ordres p entiers tels que $p < \alpha$ (le plus grand ordre étant le plus grand entier strictement inférieur à α).

2. Cas $u_n = 1/n^n$.

- a) Pour $n \geq 2$, $n^n \geq 2^n$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}}$$

- b) Pour $k \geq 3$, $k^k \geq 3^k$, donc $0 \leq u_k \leq \frac{1}{3^k}$. Pour $n \geq 2$, tous les indices $k \geq n+1$ vérifient $k \geq 3$, donc

$$0 \leq R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

- c) D'après b), pour $n \geq 2$, $0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$: par comparaison avec une série géométrique convergente, $\sum R_{1,n}$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge à l'ordre 2. Pour $n \geq 1$, les indices $k \geq n+1$ vérifient $k \geq 2$, donc

$$0 \leq R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \quad \boxed{0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n} \quad (n \geq 1).}$$

- d) Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}_p$: « $\sum u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p 3^n}$ ». $\mathcal{H}_1$ est la question b). Supposons $\mathcal{H}_p$. Alors $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \geq 2$, donc $\sum R_{p,n}$ converge par comparaison : la série converge à l'ordre $p+1$. Pour $n \geq 2$, les indices $k \geq n+1$ sont ≥ 2 et

$$0 \leq R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} 3^n},$$

ce qui établit $\mathcal{H}_{p+1}$.

$$\boxed{\forall p \geq 1, \quad \sum u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et } \forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

- e) Pour $n \geq 2$, d) avec $p = n$ donne $0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n} = \frac{1}{6^n}$. Par comparaison avec une série géométrique convergente,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$$

3. Cas $u_n = (-1)^n/(n+1)$.

a) Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.$$

b) Par linéarité de l'intégrale et somme géométrique de raison $-t \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-t)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-t)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} dt,$$

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

c) $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \rightarrow 0$ d'après a). Donc $\sum u_n$ converge, de somme $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Pour $n \geq 0$,

$$R_{1,n} = \ln 2 - \sum_{k=0}^n u_k, \quad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

d) Montrons par récurrence sur $p \geq 1$: « $\sum u_n$ converge à l'ordre p et $\forall n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$ ». Le cas $p = 1$ est c). Supposons la propriété vraie au rang p et fixons $n \geq 0$. Pour $N > n$, par linéarité et somme géométrique :

$$\sum_{k=n+1}^N R_{p,k} = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^p} \sum_{k=n+1}^N (-t)^{k+p} dt = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1} - (-t)^{N+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt.$$

Or $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+p+1} dt = \frac{1}{N+p+2} \rightarrow 0$. Donc la série $\sum_k R_{p,k}$ converge (la série converge à l'ordre $p+1$) et

$$R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt.$$

$$\forall p \geq 1, \sum u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et } \forall n \geq 0, R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

Problème – Processus de Poisson

Problème – Partie A – Définition par les X_k

$X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\}$.

Corrigé – Problème.

On peut supposer les X_k à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que la suite (S_n) est croissante.

1. Loi de $[N_t = 0]$.

Si $S_1 > t$, alors $S_n \geq S_1 > t$ pour tout $n \geq 1$, donc $\{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\} = \{0\}$ et $N_t = 0$. Réciproquement, si $N_t = 0$, alors 1 n'appartient pas à cet ensemble, donc $S_1 > t$. Ainsi $[N_t = 0] = [X_1 > t]$ et

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}.$$

2. Lien avec la loi $\gamma(1)$.

La loi $\gamma(1)$ a pour densité $u \mapsto e^{-u}$ sur $\mathbb{R}_+$ (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) : c'est la loi $\mathcal{E}(1)$, de fonction de répartition $F(y) = 1 - e^{-y}$ pour $y \geq 0$ et $F(y) = 0$ pour $y < 0$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, pour $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\lambda X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y/\lambda)$, qui vaut $1 - e^{-y}$ si $y \geq 0$ et 0 sinon : λX a la fonction de répartition de $\gamma(1)$.
- Si $\lambda X \hookrightarrow \gamma(1)$, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\lambda X \leq \lambda x)$, qui vaut $1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et 0 sinon : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

La fonction de répartition caractérisant la loi :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \gamma(1).$$

3. Densité de λS_n .

Pour $n \geq 1$, notons $f_n(u) = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u}$ si $u > 0$, $f_n(u) = 0$ sinon (densité de la loi $\gamma(n)$). Montrons par récurrence que f_n est une densité de λS_n .

Pour $n = 1$, c'est la question 2. Supposons le résultat au rang n . On a $\lambda S_{n+1} = \lambda S_n + \lambda X_{n+1}$, où λS_n et λX_{n+1} sont indépendantes (lemme des coalitions), de densités f_n et f_1 , et f_1 est bornée par 1. D'après le théorème de convolution, λS_{n+1} admet pour densité $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u) f_1(x-u) du$. L'intégrande est nul sauf si $u > 0$ et $x-u > 0$. Donc $g(x) = 0$ si $x \leq 0$, et pour $x > 0$,

$$g(x) = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} e^{-(x-u)} du = e^{-x} \left[\frac{u^n}{n!} \right]_0^x = \frac{x^n}{n!} e^{-x} = f_{n+1}(x).$$

$$\lambda S_n \text{ admet pour densité } u \mapsto \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(u) \quad (\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)).$$

4. Comparaison de $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.

Soit $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $N_t(\omega) \geq n$, l'ensemble $\{k, S_k(\omega) \leq t\}$ est fini, de plus grand élément $N_t(\omega) \geq n$; comme $(S_k(\omega))$ est croissante, $S_n(\omega) \leq S_{N_t(\omega)}(\omega) \leq t$. Donc $[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t]$.

- Si $S_n(\omega) \leq t$ et si $N_t(\omega) \neq -1$, alors n appartient à l'ensemble fini $\{k, S_k(\omega) \leq t\}$, donc $N_t(\omega) \geq n$. Ainsi $[S_n \leq t] \subset [N_t \geq n] \cup [N_t = -1]$.

Montrons que $\mathbb{P}(N_t = -1) = 0$. Par croissance de (S_k) , l'ensemble $\{k, S_k \leq t\}$ est infini si et seulement si $S_k \leq t$ pour tout $k : [N_t = -1] = \bigcap_{k \geq 1} [S_k \leq t]$, intersection d'une suite décroissante d'événements. Par le théorème de la limite monotone et la question 3,

$$\mathbb{P}(N_t = -1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\lambda S_k \leq \lambda t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{\lambda t} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} e^{-u} du,$$

et, comme $e^{-u} \leq 1$,

$$0 \leq \int_0^{\lambda t} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} e^{-u} du \leq \frac{(\lambda t)^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées. Donc $\mathbb{P}(N_t = -1) = 0$, et :

$$[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t] \subset [N_t \geq n] \cup [N_t = -1], \text{ avec } \mathbb{P}(N_t = -1) = 0, \\ \text{donc } \mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t).$$

5. Expression de $\mathbb{P}(N_t = n)$.

Pour $n \geq 1$, $[N_t \geq n+1] \subset [N_t \geq n]$ et $[N_t = n] = [N_t \geq n] \setminus [N_t \geq n+1]$. D'après 4 et 3,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) = \mathbb{P}(\lambda S_n \leq \lambda t) - \mathbb{P}(\lambda S_{n+1} \leq \lambda t),$$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

6. Loi de N_t .

On intègre par parties la seconde intégrale avec $a(u) = \frac{u^n}{n!}$ et $b(u) = -e^{-u}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \lambda t]$, de dérivées $a'(u) = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}$ et $b'(u) = e^{-u}$:

$$\int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du = \left[-\frac{u^n}{n!} e^{-u} \right]_0^{\lambda t} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du = -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du.$$

En reportant dans 5 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Avec la question 1 (cas $n = 0$) et $\mathbb{P}(N_t = -1) = 0$:

$$N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t).$$

7. Simulations.

- a) S_n est la somme de n réalisations indépendantes de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$:

```
def simulation_S(n, lam):
    X = rd.exponential(1/lam, n)    # n realisations independantes
    return np.sum(X)
```

- b) On ajoute des durées exponentielles tant que la somme reste inférieure ou égale à t , en comptant le nombre de termes ajoutés :

```
def simulation_N(t, lam):
    n = 0
    S = rd.exponential(1/lam)      # S = S_1
    while S <= t:
        n = n + 1                  # S_n <= t
        S = S + rd.exponential(1/lam)
    return n
```

- c) On ajoute à la liste chaque S_n tant qu'il est inférieur ou égal à t , puis on passe à $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$:

```
def evolution_S(t, lam):
    L = []
    S = rd.exponential(1/lam)
    while S <= t:
        L = L + [S]
        S = S + rd.exponential(1/lam)
    return L
```

- d) Avec $S[i] = S_{i+1}$, il faut tracer, pour $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, le segment horizontal joignant $(S_{i+1}, i+1)$ à $(S_{i+2}, i+1)$, car $N_t = i+1$ pour $t \in [S_{i+1}, S_{i+2}[$. Les autres propositions ne conviennent pas : ii et iv mélangent indices et instants, et iii, qui utilise $S[i-1]$, trace pour $i = 0$ un segment issu de $S[-1]$ (dernier élément de la liste) et ne trace jamais le dernier palier.

Instruction i : `plt.plot([S[i], S[i+1]], [i+1, i+1]).`

- e) Sur le tracé, les sauts ont lieu aux instants $S_1 \approx 0,5$, $S_2 \approx 2$, $S_3 \approx 2,8$, $S_4 \approx 3,6$, $S_5 \approx 4,3$. Comme $S_3 \leq 3,2 < S_4$ et $S_5 \leq 5,5$:

$$N_{3,2} = 3, \quad N_{5,5} = 5, \quad S_2 \approx 2, \quad X_4 = S_4 - S_3 \approx 3,6 - 2,8 = 0,8.$$

Problème – Partie B – Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ Hypothèses (H_1) – (H_4) ; détermination de p_0 , puis de $p_n(t) = \mathbb{P}(N_t = n)$.**Corrigé – Problème.****8. Propriétés élémentaires.**a) D'après (H_1) , $N_0 = 0$:

$$p_0(0) = 1.$$

b) D'après (H_3) , $N_{t+h} - N_t$ a même loi que N_h , qui est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (H_1) . Donc

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 0) = \mathbb{P}(N_h \geq 0) = 1.$$

9. Détermination de p_0 .

a) Notons $D = N_{t+h} - N_t$, à valeurs entières. On a $[N_t = 0] \cap [D = 0] \subset [N_{t+h} = 0]$. Réciproquement, si $N_{t+h} = 0$ et $D \geq 0$, comme $N_t \geq 0$, la relation $N_t + D = 0$ impose $N_t = D = 0$: $[N_{t+h} = 0] \subset ([N_t = 0] \cap [D = 0]) \cup [D < 0]$, avec $\mathbb{P}(D < 0) = 0$ (question 8.b). Donc, par indépendance de N_t et D et égalité des lois de D et N_h (H_3) ,

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}([N_t = 0] \cap [D = 0]) = \mathbb{P}(N_t = 0)\mathbb{P}(D = 0),$$

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

b) Comme $0 \leq p_0(h) \leq 1$, a) donne $p_0(t+h) \leq p_0(t)$: p_0 est décroissante.

p_0 ne s'annule pas. Supposons $p_0(t_0) = 0$ pour un $t_0 > 0$. D'après a), $p_0(t_0) = p_0(t_0/2)^2$, donc $p_0(t_0/2) = 0$, puis par récurrence $p_0(t_0/2^k) = 0$ pour tout k . Pour $s > 0$, il existe k tel que $t_0/2^k \leq s$, et par décroissance $p_0(s) = 0$. Soit alors $h > 0$: avec $D = N_{2h} - N_h$, de même loi que N_h et donc presque sûrement ≥ 1 , on a $\mathbb{P}(N_h \geq 1) = 1$ et $\mathbb{P}(D \geq 1) = 1$, d'où $\mathbb{P}(N_{2h} \geq 2) \geq \mathbb{P}([N_h \geq 1] \cap [D \geq 1]) = 1$. Ainsi $\frac{\mathbb{P}(N_{2h} \geq 2)}{2h} = \frac{1}{2h} \rightarrow +\infty$ quand $h \rightarrow 0^+$, ce qui contredit (H_4) . Donc $p_0(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Stricte décroissance. Pour $t \geq 0$ et $h > 0$, (H_2) donne $p_0(h) < 1$ et $p_0(t) > 0$, donc $p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h) < p_0(t)$.

$$p_0 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ (et à valeurs dans }]0, 1]).$$

c) Par récurrence sur n : $p_0(0 \cdot s) = p_0(0) = 1 = p_0(s)^0$, et si $p_0(ns) = p_0(s)^n$, alors $p_0((n+1)s) = p_0(ns)p_0(s) = p_0(s)^{n+1}$ d'après a). Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad p_0(ns) = (p_0(s))^n.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s = \frac{m}{n}$. Alors $p_0(m) = p_0(ns) = p_0(s)^n$ et $p_0(m) = p_0(m \cdot 1) = p_0(1)^m$. Comme $p_0(s) > 0$, $p_0(s) = (p_0(1)^m)^{1/n}$:

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(1))^{m/n}.$$

- d) D'après b), $0 < p_0(1) < p_0(0) = 1$, donc $\lambda = -\ln p_0(1)$ est bien un réel strictement positif. Par c), pour tout rationnel $r \geq 0$, $p_0(r) = e^{-\lambda r}$. Comme $u_n \rightarrow t > 0$, on a $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, et par décroissance de p_0 :

$$e^{-\lambda v_n} = p_0(v_n) \leq p_0(t) \leq p_0(u_n) = e^{-\lambda u_n}.$$

Par continuité de l'exponentielle, les deux bornes tendent vers $e^{-\lambda t}$; par encadrement,

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Cette formule vaut aussi pour $t = 0$.

10. Loi de N_t .

- a) $e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$:

$$p_0(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \lambda h + o(h).$$

- b) Comme $N_h(\Omega) \subset \mathbb{N}$, les événements $[N_h = 0]$, $[N_h = 1]$, $[N_h \geq 2]$ sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω : ils forment un système complet d'événements. Donc $p_0(h) + p_1(h) + \mathbb{P}(N_h \geq 2) = 1$ et, par (H₄) et a),

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) - \mathbb{P}(N_h \geq 2) = \lambda h + o(h) - o(h), \quad p_1(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda h + o(h).$$

- c) Notons $D' = N_{t+h} - N_h$: d'après (H₃) (appliquée aux réels h et t), D' est indépendante de N_h et a même loi que N_t . Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$:

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \mathbb{P}([N_h = 0] \cap [D' = n]) + \mathbb{P}([N_h = 1] \cap [D' = n-1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([N_h \geq 2] \cap [N_{t+h} = n]). \end{aligned}$$

Par indépendance, les deux premiers termes valent $p_0(h)p_n(t)$ et $p_1(h)p_{n-1}(t)$; le troisième est compris entre 0 et $\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$.

$$p_n(t+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h).$$

On note que le terme $o(h)$ est majoré par $\mathbb{P}(N_h \geq 2)$, indépendamment de t .

- d) D'après c), a) et b), et comme $0 \leq p_n(t), p_{n-1}(t) \leq 1$:

$$\begin{aligned} p_n(t+h) - p_n(t) &= (p_0(h) - 1)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h) \\ &= -\lambda h p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h), \end{aligned}$$

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + o(1).$$

Ainsi p_n est dérivable à droite en tout $t \geq 0$, de dérivée à droite $\lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$. Pour $t > 0$ et $0 < h \leq t$, la question c) appliquée en $t-h$ donne de même

$$p_n(t) - p_n(t-h) = (p_0(h) - 1)p_n(t-h) + p_1(h)p_{n-1}(t-h) + O(\mathbb{P}(N_h \geq 2)),$$

ce qui montre d'abord que $p_n(t-h) \rightarrow p_n(t)$ (pour tout n), puis que $\frac{p_n(t) - p_n(t-h)}{h} \rightarrow \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$. Donc p_n est dérivable en t et

$$p'_n(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$$

(dérivée à droite en $t = 0$). Pour $n = 0$, $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$.

e) q_n est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour $n \geq 1$,

$$q'_n(t) = \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t} \lambda (p_{n-1}(t) - p_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t), \quad \boxed{q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t).}$$

f) Pour $n = 0$: $q_0(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1 = \frac{(\lambda t)^0}{0!}$. Supposons $q_n(s) = \frac{(\lambda s)^n}{n!}$ pour tout $s \geq 0$. Alors $q'_{n+1}(s) = \lambda \frac{(\lambda s)^n}{n!}$ est continue sur $[0, t]$, et $q_{n+1}(0) = p_{n+1}(0) = \mathbb{P}(N_0 = n+1) = 0$ (H_1). Donc

$$q_{n+1}(t) = q_{n+1}(0) + \int_0^t \lambda \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} q_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$:

$$\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t) \quad (t > 0).}$$

On retrouve la loi obtenue dans la partie A.

11. Les instants de saut.

Comme l'énoncé y invite, on raisonne sur les trajectoires $t \mapsto N_t(\omega)$, que l'on considère croissantes (question 8.b), continues à droite et progressant par sauts d'une unité, comme dans la figure 1.

a) L'ensemble $\{t \in \mathbb{R}_+, N_t = 0\}$ contient 0 (car $N_0 = 0$) et est inclus dans $\mathbb{R}_+$; sa borne inférieure est donc son plus petit élément 0.

$$\boxed{S_0 = 0.}$$

b) Si $N_t(\omega) = 0$, par croissance $N_s(\omega) = 0$ pour $s \in [0, t]$, et par continuité à droite $N_s(\omega) = 0$ sur un intervalle $[t, t + \varepsilon[$: donc $S_1(\omega) \geq t + \varepsilon > t$. Si $N_t(\omega) \geq 1$, la trajectoire, partie de 0 et progressant par sauts d'une unité, prend la valeur 1 en un instant $s \leq t$, donc $S_1(\omega) \leq t$.

$$\boxed{[S_1 > t] = [N_t = 0].}$$

c) Par b) et la question 9.d,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_1 \leq t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

d) $S_1 \geq 0$, donc $\mathbb{P}(S_1 \leq t) = 0$ pour $t < 0$, et c) donne $\mathbb{P}(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$: c'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ , qui caractérise la loi.

$$\boxed{S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

e) Soit $t \geq 0$ et $m = N_t(\omega)$. Pour $n \leq m$, la trajectoire passe par toutes les valeurs entières de 0 à m (sauts d'une unité) : elle prend la valeur n en un instant $s \leq t$, donc $S_n(\omega) \leq t$. Pour $n > m$, par croissance $N_s(\omega) \leq m < n$ pour $s \leq t$, et par continuité à droite $N_s(\omega) = m$ sur un intervalle $[t, t + \varepsilon[$; donc $S_n(\omega) \geq t + \varepsilon > t$. Ainsi $\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\} = \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$

Les deux définitions du processus de Poisson sont donc cohérentes.