

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2020

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1 – Polynômes de Tchebychev	2
<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; intégrales généralisées. . . .</i>	2
2 Exercice 2 – Ordre de convergence d'une série	3
<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales.</i>	3
3 Problème – Processus de Poisson	4
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; Python.</i>	4

1 Exercice 1 – Polynômes de Tchebychev

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; intégrales généralisées.

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

1. a) Expliciter T_2 et T_3 .
 b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n .
 c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x).$$

- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. a) Montrer que, pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

est convergente.

- b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

- c) Montrer que, si n et m sont deux entiers naturels distincts,

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

- d) Montrer que, si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.

Indication : on pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.

- e) Montrer que

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

- f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n , la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, par

$$d_n = \inf\{\|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$

a) Justifier que

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k.$$

b) Montrer alors que $d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

c) Déterminer, en particulier, la valeur de d_2 .

2 Exercice 2 – Ordre de convergence d'une série

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et l'on note $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite de ses restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et l'on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes correspondante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et l'on note $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On convient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question uniquement, on considère $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge. On se place désormais sous cette condition.

b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

- d) En déduire que $R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.
- e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?
- f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
2. Dans cette question uniquement, on considère $u_n = \frac{1}{n^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
- b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

- c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 et que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

- d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

- e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. Dans cette question uniquement, on considère $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

- b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

- c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geq 0$,

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

- d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geq 0$,

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

3 Problème – Processus de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; Python.

On étudie un processus temporel de comptage appelé *processus de Poisson*. L'objectif est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révéleront équivalentes. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A – Définition par $X_1, X_2, \dots, X_n$

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$. Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note N_t la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de n pour laquelle S_n est inférieure ou égale à t , c'est-à-dire

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose $N_t = -1$.

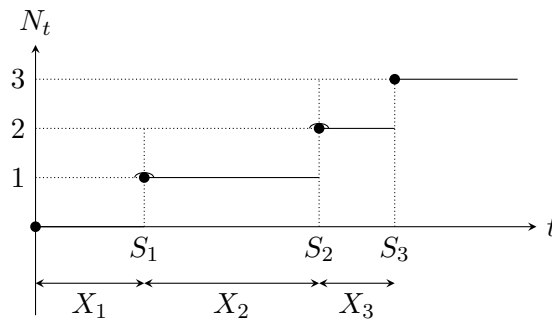


Figure 1 – Exemple de réalisation de N_t , en fonction de t .

1. Pour tout réel t strictement positif, montrer que $\mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.
3. Pour tout entier n non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire λS_n .
4. Pour tout réel t strictement positif et tout entier naturel n , comparer les événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Quelle est la loi de N_t ?

7. Les instructions Scilab de l'énoncé sont adaptées en Python. Une fonction NumPy de simulation exponentielle, appelée avec l'échelle `1/lambda` et la taille (n, p) , fournit une matrice de n lignes et p colonnes dont les coefficients sont des réalisations indépendantes de loi exponentielle de paramètre `lambda`. La fonction de tracé `plot` relie les points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ lorsque `x` et `y` sont deux listes de même taille.
 - a) Écrire une fonction `simulation_S(n, lambda)` renvoyant une réalisation de S_n .
 - b) Écrire une fonction `simulation_N(t, lambda)` renvoyant une réalisation de N_t .

- c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant toutes les valeurs $S_1, S_2, \dots$ tant que $S_n \leq t$. Compléter cette fonction.

```
import numpy as np

def evolution_S(t, lam):
    L = []
    S = np.random.exponential(scale=1/lam)
    while ...:
        L.append(S)
        S = S + ...
    return L
```

- d) On a commencé à écrire une fonction Python ci-dessous. Dans cette fonction, on note $S = [S_1, \dots, S_n]$ et on souhaite tracer l'évolution de N_t du temps 0 au temps S_n , de la même manière que sur la figure 1. Compléter la ligne manquante.

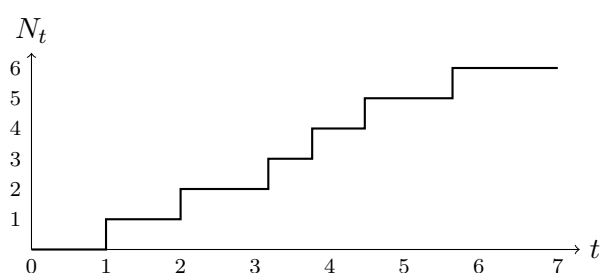
```
import matplotlib.pyplot as plt

def trace_N(T, lam):
    S = evolution_S(T, lam)
    n = len(S)
    plt.plot([0, S[0]], [0, 0])
    for i in range(n-1):
        ...
```

Parmi les instructions suivantes, laquelle convient ?

- i. `plt.plot([S[i], S[i+1]], [1, 1])`
- ii. `plt.plot([i, i+1], [S[i], S[i+1]])`
- iii. `plt.plot([S[i-1], S[i]], [i, i])`
- iv. `plt.plot([i, S[i+1]], [i, i])`

- e) Un élève exécute le script précédent pour $T = 7$ et $\lambda = 1$ et obtient le tracé suivant :



Que valent dans ce cas $N_{3,2}$ et $N_{5,5}$? Donner une valeur approchée de S_2 et de X_4 .

Partie B – Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

Les deux parties du problème sont indépendantes. Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (H₁) $N_0 = 0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$;
- (H₂) pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(N_t = 0) < 1$;
- (H₃) pour tous réels $h \geq 0$ et $t \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de N_t ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi;

(H₄) $\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $p_n(t) = \mathbb{P}(N_t = n)$.

8. Propriétés élémentaires.

- a) Que vaut $p_0(0)$?
- b) Montrer que le processus est croissant, c'est-à-dire que, pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1.$$

9. Détermination de p_0 .

- a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que, pour tout $t, h \in \mathbb{R}_+$,

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

- b) En déduire que la fonction p_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- c) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$, $p_0(ns) = (p_0(s))^n$. En déduire que, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(1))^{m/n}.$$

Indication : on pourra poser $s = \frac{m}{n}$ et utiliser le début de la question.

- d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq t \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = t$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$. Montrer que

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. Loi de N_t . Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

- a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque h tend vers 0.
- b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$ est un système complet d'événements, montrer que

$$p_1(h) = \lambda h + o(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

- c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements précédent, montrer que

$$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

- d) En déduire que

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + o(1) \quad (h \rightarrow 0).$$

En déduire que p_n est dérivable en t et donner l'expression de $p'_n(t)$.

- e) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$. Justifier la dérivabilité de q_n , puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

- f) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

g) Quelle est la loi de N_t ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le premier instant t où N_t vaut n , c'est-à-dire

$$S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}.$$

a) Que vaut S_0 ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de N_t .

c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

d) Reconnaître la loi de S_1 .

e) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$