

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2020

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Extrema de $f(x, y, z) = xe^{x(y^2+z^2+1)}$

Point critique, hessienne, minimum global, extrema sous contraintes.

Corrigé – Exercice 1.

On note $s(y, z) = y^2 + z^2 + 1 \geq 1$ et $g(x, y, z) = xs(y, z)$, de sorte que $f = xe^g$.

1. Régularité.

g est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$; $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc e^g l'est par composition, et f par produit avec la fonction polynomiale $(x, y, z) \mapsto x$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

2. Point critique.

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\partial_1 f = (1 + xs)e^g, \quad \partial_2 f = 2x^2 y e^g, \quad \partial_3 f = 2x^2 z e^g.$$

Comme $e^g > 0$, un point critique vérifie $1 + xs = 0$, $x^2 y = 0$ et $x^2 z = 0$. La première équation impose $x \neq 0$, donc $y = z = 0$, puis $s = 1$ et $x = -1$.

$A = (-1, 0, 0)$ est l'unique point critique de f .

3. Nature du point critique.

a) On dérive les expressions précédentes ($\partial_1 g = s$, $\partial_2 g = 2xy$, $\partial_3 g = 2xz$) :

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f &= s e^g + (1 + xs) s e^g = s(2 + xs) e^g, & \partial_{2,2}^2 f &= 2x^2(1 + 2xy^2) e^g, \\ \partial_{1,2}^2 f &= 2xy(2 + xs) e^g, & \partial_{3,3}^2 f &= 2x^2(1 + 2xz^2) e^g, \\ \partial_{1,3}^2 f &= 2xz(2 + xs) e^g, & \partial_{2,3}^2 f &= 4x^3 y z e^g. \end{aligned}$$

En A , $s = 1$, $xs = -1$ et $g = -1$:

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f(A) &= e^{-1}, & \partial_{2,2}^2 f(A) &= \partial_{3,3}^2 f(A) = 2e^{-1}, \\ \partial_{1,2}^2 f(A) &= \partial_{1,3}^2 f(A) = \partial_{2,3}^2 f(A) = 0. \end{aligned}$$

b) Les dérivées croisées étant égales (théorème de Schwarz),

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

est diagonale, de valeurs propres e^{-1} et $2e^{-1}$, toutes strictement positives. A étant un point critique de f (de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$), f présente un minimum local en A , de valeur $f(A) = -e^{-1}$.

f admet en A un minimum local égal à $-e^{-1}$.

4. Minimum global.

a) Comme $s \geq 1$:

- si $x \geq 0$, $xs \geq x$, donc $e^{xs} \geq e^x$ et $xe^{xs} \geq xe^x$;
- si $x < 0$, $xs \leq x$, donc $e^{xs} \leq e^x$ et, en multipliant par $x < 0$, $xe^{xs} \geq xe^x$.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) \geq xe^x.$$

b) La fonction $h : x \mapsto xe^x$ a pour dérivée $h'(x) = (1+x)e^x$, négative sur $] -\infty, -1]$ et positive sur $[-1, +\infty[$: h admet un minimum global en -1 , égal à $-e^{-1}$. Ainsi $f(x, y, z) \geq h(x) \geq -e^{-1} = f(A)$.

Le minimum local trouvé en A est un minimum global : $\min_{\mathbb{R}^3} f = -e^{-1}$.

5. Contrainte linéaire (C).

Les points vérifiant (C) sont les $(1, -1, z)$, $z \in \mathbb{R}$, et $f(1, -1, z) = e^{2+z^2} \geq e^2$, avec égalité si et seulement si $z = 0$.

Sous (C), f admet un minimum global en $(1, -1, 0)$, égal à e^2 .

6. Contrainte (C').

Si $xs(y, z) = 1$, alors $x = \frac{1}{s(y, z)} \in]0, 1]$ et $f(x, y, z) = xe^1 = \frac{e}{y^2+z^2+1} \leq e$, avec égalité si et seulement si $y = z = 0$, c'est-à-dire au point $(1, 0, 0)$, qui vérifie bien (C').

Sous (C'), f admet un maximum global en $(1, 0, 0)$, égal à e .

Exercice 2

Exercice 2 – Estimation du paramètre d'une loi uniforme

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \theta])$; estimateurs $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $\widehat{Z}_n = 2\overline{X}_n$; ordre de convergence.

Corrigé – Exercice 2.

1. Rappels.

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/\theta & \text{si } 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & \text{si } x > \theta. \end{cases}$$

b)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

2. L'estimateur Y_n .

a) Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, $\theta U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \theta])$. On simule donc n variables uniformes sur $[0, \theta]$ et on en prend le maximum :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
theta = float(input("Entrez une valeur pour theta : "))
X = theta * rd.random(n)    # X_1, ..., X_n
Y = np.max(X)               # simulation de Y_n
print(Y)
```

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $[Y_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$; par indépendance mutuelle et puisque les X_i ont même loi que X ,

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = (F(x))^n, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (x/\theta)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & \text{si } x > \theta. \end{cases}$$

c) F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (les raccords en 0 et θ sont continus) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$. Donc Y_n est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant F_n là où elle est dérivable :

$$f_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \text{ si } x \in]0, \theta[, \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

d) Y_n est bornée, donc admet une espérance :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^\theta x \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}.$$

Le biais vaut $\mathbb{E}(Y_n) - \theta = -\frac{\theta}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ .

3. L'estimateur $\widehat{Z}_n$.

Par linéarité, $\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$. Donc $\widehat{Z}_n = 2Z_n$ est une statistique vérifiant $\mathbb{E}(\widehat{Z}_n) = \theta$:

$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{\theta}{2}$, $\widehat{Z}_n = 2Z_n$ est un estimateur sans biais de θ .

4. Unicité de l'ordre de convergence.

Supposons que T_n admette deux ordres $0 < \alpha < \beta : n^\alpha(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ et $n^\beta(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} V$, où ni U ni V n'est quasi sûrement nulle. On écrit

$$n^\alpha(T_n - \theta) = n^{\alpha-\beta} \cdot n^\beta(T_n - \theta), \quad n^{\alpha-\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } \alpha - \beta < 0).$$

D'après le résultat admis, $n^\alpha(T_n - \theta)$ converge en loi vers $0 \cdot V = 0$. Par unicité de la loi limite, U a la même loi que la variable nulle, c'est-à-dire que U est quasi sûrement nulle : contradiction.

L'ordre de convergence d'un estimateur, s'il existe, est unique.

5. Loi de $Y = -T$.

$T \mapsto \mathcal{E}(1/\theta)$ a pour fonction de répartition $t \mapsto 1 - e^{-t/\theta}$ sur $\mathbb{R}_+$ (nulle sur $\mathbb{R}_-$). Pour $y \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{P}(T = -y) = 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(-T \leq y) = \mathbb{P}(T \geq -y) = 1 - F_T(-y), \quad F_Y(y) = \begin{cases} e^{y/\theta} & \text{si } y \leq 0, \\ 1 & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

6. Ordre de convergence de Y_n .

a) Pour $x \geq 0$, $[Y_n \leq \theta] \subset [n(Y_n - \theta) \leq x]$, et $\mathbb{P}(Y_n \leq \theta) = F_n(\theta) = 1$:

$$\forall x \geq 0, \quad \mathbb{P}(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1.$$

b) Pour $x < 0$ et $n > -\frac{x}{\theta}$, on a $0 < \theta + \frac{x}{n} < \theta$, donc

$$\mathbb{P}(n(Y_n - \theta) \leq x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq \theta + \frac{x}{n}\right) = F_n\left(\theta + \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{\theta + x/n}{\theta}\right)^n,$$

$$\mathbb{P}(n(Y_n - \theta) \leq x) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n.$$

c) Pour $x < 0$, $n \ln(1 + \frac{x}{n\theta}) \sim n \cdot \frac{x}{n\theta} = \frac{x}{\theta}$ (car $\ln(1+u) \sim u$ en 0), donc par continuité de l'exponentielle $(1 + \frac{x}{n\theta})^n \rightarrow e^{x/\theta} = F_Y(x)$. Pour $x \geq 0$, la suite est constante égale à $1 = F_Y(x)$. Ainsi la fonction de répartition de $n(Y_n - \theta)$ converge vers F_Y en tout point de $\mathbb{R}$; par définition de la convergence en loi,

$$n(Y_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.$$

$Y = -T$ n'est pas quasi sûrement nulle ($\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(T = 0) = 0$), donc :

Y_n est d'ordre de convergence 1.

7. Ordre de convergence de $\widehat{Z}_n$.

a) $\widehat{Z}_n = 2Z_n = \frac{2}{n} \sum_i X_i$, donc

$$\widehat{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2X_i).$$

b) Les variables $2X_i$ sont indépendantes, de même loi, et admettent une espérance $\mathbb{E}(2X) = \theta$ et une variance $\mathbb{V}(2X) = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3} > 0$. Comme $\widehat{Z}_n$ est leur moyenne empirique, le théorème central limite donne :

$$\widehat{Z}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

c) Avec $\mathbb{E}(2X) = \theta$ et $\sqrt{\mathbb{V}(2X)} = \frac{\theta}{\sqrt{3}}$:

$$\widehat{Z}_n^* = \sqrt{n} \frac{\widehat{Z}_n - \theta}{\theta/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3n}}{\theta} (\widehat{Z}_n - \theta).$$

Ainsi $\sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{3}} \widehat{Z}_n^*$. Par composition par la fonction continue $u \mapsto \frac{\theta}{\sqrt{3}} u$, $\sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta)$ converge en loi vers $\frac{\theta}{\sqrt{3}} Z$, qui suit la loi $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$ (transformation affine d'une variable normale).

$$\sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right) ; \widehat{Z}_n \text{ est d'ordre de convergence } \frac{1}{2}.$$

La limite n'est pas quasi sûrement nulle (variance $\frac{\theta^2}{3} > 0$). L'estimateur Y_n , d'ordre 1, converge donc plus vite que $\widehat{Z}_n$.

Exercice 3

Exercice 3 – Somme de projecteurs

$q_k = p_1 + \dots + p_k$ est un projecteur si et seulement si $p_i \circ p_j = \theta$ pour $i \neq j$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Projecteurs.

- a) Soit $x \in E$. On écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $p(x) \in \text{Im}(p)$ et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$, donc $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$: $E = \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$. Si $y \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$, $y = p(z)$ et $0 = p(y) = p^2(z) = p(z) = y$. Ainsi

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p).$$

- b) Si $y = p(z) \in \text{Im}(p)$, alors $p(y) = p^2(z) = y$, donc $(\text{Id} - p)(y) = 0$. Réciproquement, si $(\text{Id} - p)(y) = 0$, $y = p(y) \in \text{Im}(p)$.

$$\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p).$$

- c) D'après a) et b), $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id})$. En concaténant une base de $\text{Ker}(p)$ (vecteurs vérifiant $p(u) = 0$) et une base de $\text{Ker}(p - \text{Id})$ (vecteurs vérifiant $p(u) = u$), on obtient une base de E formée de vecteurs propres de p (ou de vecteurs du noyau) : p est diagonalisable. Dans cette base, la matrice de p est diagonale avec $\dim \text{Ker}(p)$ coefficients nuls et $r = \dim \text{Im}(p)$ coefficients égaux à 1, donc $\text{Tr}(p) = r$.

$$p \text{ est diagonalisable et } \text{rg}(p) = \text{Tr}(p).$$

2. Dimension d'une somme.

Pour $k = 1$, l'inégalité est une égalité. Supposons-la vraie au rang k et soient $E_1, \dots, E_{k+1}$ des sous-espaces de E ; notons $F = E_1 + \dots + E_k$. La concaténation d'une base de F et d'une base de E_{k+1} est une famille génératrice de $F + E_{k+1}$, à $\dim F + \dim E_{k+1}$ éléments ; donc $\dim(F + E_{k+1}) \leq \dim F + \dim E_{k+1}$, et par hypothèse de récurrence

$$\dim(E_1 + \dots + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_{k+1}).$$

3. Condition suffisante.

Par bilinéarité de la composition,

$$q_k \circ q_k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i \circ p_i + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i + \theta = q_k.$$

$$\text{Si } p_i \circ p_j = \theta \text{ pour tous } i \neq j, \text{ alors } q_k \text{ est un projecteur.}$$

4. Image de q_k .

- a) Pour $x \in E$, $q_k(x) = \sum_i p_i(x)$ avec $p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$:

$$\text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k).$$

- b) q_k et les p_i sont des projecteurs ; d'après 1.c, la linéarité de la trace, la question 2 et a) :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(q_k) = \operatorname{Tr}(q_k) &= \sum_{i=1}^k \operatorname{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^k \operatorname{rg}(p_i) \geq \dim\left(\sum_{i=1}^k \operatorname{Im}(p_i)\right) \\ &\geq \dim \operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{rg}(q_k). \end{aligned}$$

Toutes ces inégalités sont des égalités. En particulier

$$\operatorname{rg}(q_k) = \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \cdots + \operatorname{Im}(p_k)),$$

et comme $\operatorname{Im}(q_k)$ est un sous-espace de $\operatorname{Im}(p_1) + \cdots + \operatorname{Im}(p_k)$ de même dimension finie,

$$\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) + \cdots + \operatorname{Im}(p_k).$$

- c) La chaîne d'égalités donne aussi $\dim(\sum_i \operatorname{Im}(p_i)) = \sum_i \dim \operatorname{Im}(p_i)$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $\operatorname{Im}(p_i)$; la concaténation $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i$ engendre $\sum_i \operatorname{Im}(p_i)$ et possède $\sum_i \dim \operatorname{Im}(p_i) = \dim(\sum_i \operatorname{Im}(p_i))$ éléments : c'en est une base, donc elle est libre. Si $x_1 + \cdots + x_k = 0$ avec $x_i \in \operatorname{Im}(p_i)$, en décomposant chaque x_i sur $\mathcal{B}_i$, on obtient une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{B}$, dont tous les coefficients sont donc nuls : $x_1 = \cdots = x_k = 0$. La somme est directe :

$$\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_k).$$

5. Les produits $p_i \circ p_j$.

- a) Soit $x \in E$. $p_j(x) \in \operatorname{Im}(p_j) \subset \operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - q_k)$ (question 1.b appliquée au projecteur q_k), donc $q_k(p_j(x)) = p_j(x)$.

$$q_k \circ p_j = p_j.$$

- b) $q_k \circ p_j = \sum_i p_i \circ p_j = p_j \circ p_j + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = p_j + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j$. Avec a) :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} p_i(p_j(x)) = 0.$$

- c) Soit j fixé, $x \in E$ et $y = p_j(x)$. D'après b), $\sum_{i \neq j} p_i(y) + 0 = 0$, où $p_i(y) \in \operatorname{Im}(p_i)$ pour $i \neq j$ et $0 \in \operatorname{Im}(p_j)$. La somme $\operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$ étant directe (4.c), l'unicité de la décomposition de 0 donne $p_i(y) = 0$ pour tout $i \neq j$.

$$\forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0.$$

6. Conclusion.

D'après les questions 3 et 5 :

$$q_k = p_1 + \cdots + p_k \text{ est un projecteur} \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0.$$

Problème

Problème – Partie 1 – Préliminaires

Constante d'Euler, série $\sum x^p/p$, produit de Cauchy de deux séries à termes positifs.

Corrigé – Problème.

1. La suite (u_n) .

a) x contient les entiers $1, \dots, n$; on somme leurs inverses :

$$u = \text{np.sum}(1 / x) - \text{np.log}(n)$$

b) Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant sur $[k, k+1]$, de longueur 1 :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

c) Pour $n \geq 2$, en sommant b) pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (somme télescopique) :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc $0 \leq u_n \leq 1$; pour $n = 1$, $u_1 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

2. La série $\sum x^p/p$.

a) Comme $t \leq x < 1$, $t \neq 1$:

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

b) On intègre a) sur $[0, x]$ (fonctions continues sur ce segment) :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt, \quad \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) Pour $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$, d'où

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

d) D'après b) et c), les sommes partielles convergent vers $-\ln(1-x)$:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

3. Produit de deux séries à termes positifs.

On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ et $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$.

- a) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $C_N = \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^m a_j b_{m-j} = \sum_{(j,l) \in I_N} a_j b_l$ où $I_N = \{(j,l) \mid j \geq 1, l \geq 0, j+l \leq N\}$ (on a posé $l = m-j$). D'autre part $A_n B_n = \sum_{(j,l) \in J_n} a_j b_l$ avec $J_n = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $I_n \subset J_n \subset I_{2n}$ et que les $a_j b_l$ sont positifs :

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

- b) Les c_k sont positifs, donc (C_n) est croissante ; elle est majorée par $A_n B_n \leq AB$. Elle converge donc vers un réel C (théorème de la limite monotone) : la série $\sum c_n$ converge. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans a), $C_n \rightarrow C$, $C_{2n} \rightarrow C$ et $A_n B_n \rightarrow AB$, donc par encadrement $C = AB$.

$$\sum_{n \geq 1} c_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

- c) i) $a_k = \frac{x^k}{k} \geq 0$ et $b_k = x^k \geq 0$. La série géométrique $\sum x^k$ converge car $0 \leq x < 1$, et $0 \leq a_k \leq x^k$: par comparaison, $\sum a_k$ converge (c'est aussi la question 2.d).

$$\sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont convergentes et à termes positifs.}$$

- ii) u contient $1, \dots, n$ et v contient $n-1, \dots, 0$; ainsi $a[k-1] = a_k$ et $b[k-1] = b_{n-k}$, et c_n est la somme des produits terme à terme :

`a = x**u / u`

`b = x**v`

`c = np.sum(a * b)`

- iii) $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} x^{n-k}$:

$$c_n = x^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Problème – Partie 2 – La fonction $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln(n)x^n$

Expression de $\sum H_n x^n$, équivalent de f en 1^- , variations, comportement en 0, nature de $\int_0^1 f$.

Corrigé – Problème.

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, de sorte que $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n$ (question 1.c), et $g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

4. La série $\sum H_n x^n$.

- a) Avec $a_k = \frac{x^k}{k}$ et $b_k = x^k$, la question 3.c.iii donne $c_n = H_n x^n$, et la question 3.b (applicable d'après 3.c.i) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

- b) D'après 2.d, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, et $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

5. Convergence de $\sum \ln(n)x^n$.

- a) Par concavité de $\ln$, $\ln(u) \leq u - 1 < u$ pour tout $u > 0$ (courbe sous sa tangente en 1).

$$\forall u > 0, \quad \ln(u) \leq u.$$

- b) Pour $n \geq 1$, $0 \leq \ln(n)x^n \leq nx^n$, et la série géométrique dérivée $\sum nx^n = x \sum nx^{n-1}$ converge car $|x| < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} \ln(n)x^n \text{ converge.}$$

6. Équivalent de f en 1^- .

- a) En multipliant $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n$ par $x^n \geq 0$ et en sommant (séries convergentes) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

Avec 4.b et $\sum_{n \geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}$:

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

- b) Pour $x \in]0, 1[$, $g(x) > 0$; en divisant a) par $g(x)$:

$$1 - \frac{x}{-\ln(1-x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, $-\ln(1-x) \rightarrow +\infty$, donc $\frac{x}{-\ln(1-x)} \rightarrow 0$; par encadrement $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

7. Variations.

- a) Soit $0 \leq x < y < 1$. Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ et $y^n > x^n$, et le terme $n = 1$ est nul ; donc

$$f(y) - f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) (y^n - x^n) \geq \ln(2)(y^2 - x^2) > 0.$$

f est strictement croissante sur $[0, 1[$.

- b) $f(0) = 0$ (tous les termes sont nuls). D'après 6.a, $f(x) \geq \frac{-\ln(1-x)-x}{1-x}$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$ (numérateur $\rightarrow +\infty$, dénominateur $\rightarrow 0^+$). Donc $\lim_{1^-} f = +\infty$.

x	0	1
$f(x)$	0	$+\infty$



8. Comportement en 0 et intégrale.

- a) Le terme d'indice 1 est nul car $\ln 1 = 0$, donc $f(x) = \sum_{n \geq 2} \ln(n)x^n$. D'après 5.a, $0 \leq \ln(n)x^n \leq nx^n$, et $\sum_{n \geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (série géométrique dérivée), donc $\sum_{n \geq 2} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} - x$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x.$$

- b) Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{x}{(1-x)^2} - x \rightarrow 0$; par encadrement $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0. Pour $x \in]0, 1[$,

$$0 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

f est continue et dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0) = 0$.

- c) f est continue et positive sur $[0, 1[$: seule la borne 1 pose problème. D'après 6.b, $f(x) \sim g(x)$ en 1^- , avec $g \geq 0$ sur $]0, 1[$. Pour $x \in [1 - e^{-1}, 1[$, $-\ln(1-x) \geq 1$ donc $g(x) \geq \frac{1}{1-x}$. L'intégrale $\int_{1-e^{-1}}^1 \frac{dx}{1-x}$ diverge : pour $X \in [1 - e^{-1}, 1[$, $\int_{1-e^{-1}}^X \frac{dx}{1-x} = [-\ln(1-x)]_{1-e^{-1}}^X = -\ln(1-X) - 1 \xrightarrow{X \rightarrow 1^-} +\infty$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int^1 g$ diverge, puis, par équivalence de fonctions positives, $\int^1 f$ diverge.

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ diverge.}$$