

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2020

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Partie I – Les racines des polynômes P_n

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$ s'annule en un unique réel u_n ; la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Corrigé – Problème 1.

1. Existence d'une racine.

- a) P_n est une fonction polynomiale de degré $2n+1$, de coefficient dominant $\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{(2n+1)!} < 0$. Elle a donc les limites de son terme dominant $-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = +\infty.$$

- b) P_n est continue sur $\mathbb{R}$ et prend des valeurs strictement positives et strictement négatives : d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

P_n admet au moins une racine réelle.

2. Les racines sont simples.

- a) Comme $\frac{d}{dx}(-x)^k = -k(-x)^{k-1}$,

$$P'_n(x) = -\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-x)^j}{j!} = -\left(P_n(x) - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),$$

$$P'_n(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- b) Soit r une racine de P_n . Comme $P_n(0) = 1$, $r \neq 0$, et a) donne $P'_n(r) = -\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} \neq 0$.

Les racines de P_n sont toutes simples.

3. Localisation des racines.

- a) On regroupe les termes d'indices $2k$ et $2k+1$ ($0 \leq k \leq n$) :

$$\frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right),$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$$

b) Si $x < 1$: pour tout k , $\frac{x}{2k+1} < 1$ (car $x < 1 \leq 2k+1$), donc chaque terme est positif, et le terme $k = 0$ vaut $1 - x > 0$: $P_n(x) > 0$.

Si $x > 2n+1$: pour tout $k \leq n$, $\frac{x}{2k+1} > \frac{2n+1}{2k+1} \geq 1$, et $\frac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$: chaque terme est strictement négatif, donc $P_n(x) < 0$.

Les racines réelles de P_n appartiennent à $[1; 2n+1]$.

4. Unicité de la racine.

a) $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$. D'après 2.a au rang $n+1$:

$$P'_{n+1}(x) = -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

En dérivant cette relation et en utilisant 2.a :

$$P''_{n+1}(x) = -P'_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_n(x).$$

$$P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad P''_{n+1}(x) = P_n(x).$$

b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: « P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel u_n ».

$P_0(x) = 1 - x$: $\mathcal{H}_0$ est vraie avec $u_0 = 1$.

Supposons $\mathcal{H}_n$. Comme P_n est strictement décroissante et s'annule en u_n , $P'_{n+1} = P_n$ est strictement positive sur $] -\infty, u_n[$ et strictement négative sur $]u_n, +\infty[$: P'_{n+1} est croissante sur $] -\infty, u_n]$ et décroissante sur $[u_n, +\infty[$, donc admet un maximum en u_n :

$$P'_{n+1}(x) \leq P'_{n+1}(u_n) = -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$$

(car $u_n \geq 1$ d'après 3.b). Ainsi P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; continue, de limites $+\infty$ et $-\infty$ (question 1.a), elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel u_{n+1} .

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel u_n .

5. Approche numérique.

a) On calcule les termes $\frac{(-x)^k}{k!}$ de proche en proche, chacun s'obtenant à partir du précédent en multipliant par $\frac{-x}{k+1}$:

def P(n, x):

 S = 0

 t = 1

 for k in range(2*n+2):

 S = S + t

 t = t * (-x) / (k+1)

 return S

 # t = (-x)**k / k! pour k = 0

 # k = 0, ..., 2n+1

- b) D'après 3.b et 4.b, $u_n \in [1, 2n+1]$ et P_n est strictement décroissante : on maintient $a \leq u_n \leq b$, et si $P_n(c) > 0$, la racine est à droite de c . Lorsque $b - a \leq 2 \cdot 10^{-3}$, le milieu c est à distance au plus 10^{-3} de u_n .

```
def suite(n):
    a = 1
    b = 2*n + 1
    c = (a + b) / 2
    while b - a > 2 * 10**(-3):
        if P(n, c) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
        c = (a + b) / 2
    return c
```

- c) Les valeurs de $\frac{u_n}{n}$ décroissent et semblent se stabiliser vers une limite strictement positive, de l'ordre de 0,55 à 0,6. On conjecture :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} cn \text{ avec } c \approx 0,55, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = +\infty.$$

(La partie III montrera que $c = 2\alpha \approx 0,557$.)

6. Monotonie de (u_n) .

- a) D'après l'écriture de P_{n+1} en 4.a et $P_n(u_n) = 0$:

$$P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

$$P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right).$$

- b) Comme $1 \leq u_n \leq 2n+1 < 2n+3$ (3.b), $P_{n+1}(u_n) > 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$. P_{n+1} étant strictement décroissante, $u_n < u_{n+1}$.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}$$

7. Raisonnement par l'absurde.

- a) (u_n) étant croissante de limite ℓ , on a $1 \leq u_n \leq \ell$. Pour $x \in [0, \ell]$, d'après 2.a,

$$|P'_n(x)| = \left| \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-x)^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^{2n} \frac{x^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x \leq e^\ell.$$

P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[u_n, \ell]$; par l'inégalité des accroissements finis,

$$|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^\ell |u_n - \ell|.$$

- b) $P_n(\ell) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\ell)^k}{k!}$ est la somme partielle d'indice $2n+1$ de la série exponentielle, convergente de somme $e^{-\ell}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\ell) = e^{-\ell}.$$

Comme $|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^\ell |u_n - \ell| \rightarrow 0$, par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}.$$

c) Or $P_n(u_n) = 0$ pour tout n , donc $e^{-\ell} = 0$, ce qui est impossible.

Contradiction : (u_n) ne converge pas.

8. Conclusion.

(u_n) est croissante et ne converge pas ; d'après le théorème de la limite monotone, elle n'est pas majorée et

$$(u_n) \text{ diverge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Problème 1 – Partie II – Résultats intermédiaires

Limite de $\frac{(n!)^{1/n}}{n}$ et racine α de $g(t) = t + \ln t + 1$.

Corrigé – Problème 1.**9. Limite de $(n!)^{1/n}/n$.**

a) f est continue sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, une primitive de $-\ln$ est $t \mapsto t - t \ln t$, donc

$$\int_x^1 f(t) dt = [t - t \ln t]_x^1 = 1 - x + x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

par croissances comparées ($x \ln x \rightarrow 0$).

$$\int_0^1 f(t) dt \text{ converge et vaut } 1.$$

b) Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset]0, 1]$ et f est décroissante sur $]0, 1]$: pour t dans cet intervalle, $f(\frac{k+1}{n}) \leq f(t) \leq f(\frac{k}{n})$. En intégrant sur un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En sommant pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ (relation de Chasles) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Comme $f(1) = 0$, le membre de droite vaut $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$; le membre de gauche vaut $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = S_n - \frac{\ln n}{n}$. D'où

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt + \frac{\ln(n)}{n}.$$

c) D'après a), $\int_{1/n}^1 f \rightarrow 1$, et $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées). Par encadrement, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow 1$, et comme $\ln\left(\frac{k}{n}\right) = -f\left(\frac{k}{n}\right)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1.$$

d) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)$. Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = e^{-1}.$$

10. Le réel α .

g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions strictement croissantes), avec $\lim_{0^+} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$. Par le théorème de la bijection, g

réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. De plus

$$g(e^{-2}) = e^{-2} - 2 + 1 = e^{-2} - 1 < 0, \quad g(e^{-1}) = e^{-1} > 0,$$

donc, par stricte croissance de g :

$$\boxed{\exists! \alpha > 0, \ g(\alpha) = 0, \quad e^{-2} < \alpha < e^{-1}.}$$

Problème 1 – Partie III – Équivalent de u_n Encadrement de e^{-x} par $P_n(x)$, puis $u_n \sim 2\alpha n$.**Corrigé – Problème 1.****11. Encadrement de e^{-x} .**

- a) La fonction $h : t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$, avec $h^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$, donc $h^{(k)}(0) = (-1)^k$ et $h^{(2n+1)}(t) = -e^{-t}$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2n$ entre 0 et x donne

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} h^{(2n+1)}(t) dt,$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$$

- b) Pour $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} \leq \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant),

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} dt = \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]_0^x,$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- c) Notons J l'intégrale de b). Comme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, a) donne $e^{-x} - P_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - J$, qui est compris entre 0 et $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ d'après b) :

$$\forall x \geq 0, \quad P_n(x) \leq e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

12. Encadrement de $u_n^{2n} e^{u_n}$.

- a) Comme $u_n \geq 0$, l'inégalité de gauche de 11.c au rang $n+1$ et celle de droite au rang n donnent, avec $P_n(u_n) = 0$:

$$P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n} \leq \frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- b) *Minoration.* D'après 6.a et 3.b ($1 \leq u_n \leq 2n+1$) : $1 - \frac{u_n}{2n+3} \geq 1 - \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3}$ et $u_n^{2n+2} \geq u_n^{2n}$, donc

$$e^{-u_n} \geq P_{n+1}(u_n) \geq \frac{u_n^{2n}}{(2n+2)!} \cdot \frac{2}{2n+3} = \frac{2u_n^{2n}}{(2n+3)!}.$$

Majoration. $\frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{u_n^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{u_n}{2n+1} \leq \frac{u_n^{2n}}{(2n)!}$ car $u_n \leq 2n+1$.

$$\frac{2u_n^{2n}}{(2n+3)!} \leq e^{-u_n} \leq \frac{u_n^{2n}}{(2n)!}.$$

En multipliant par $e^{u_n} > 0$, puis en réarrangeant chacune des deux inégalités :

$$(2n)! \leq u_n^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}.$$

13. La suite (w_n) .

- a) La fonction $t \mapsto t^{1/(2n)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; en l'appliquant à 12.b, avec $(u_n^{2n} e^{u_n})^{1/(2n)} = u_n e^{u_n/(2n)} = 2n w_n e^{w_n}$:

$$((2n)!)^{1/(2n)} \leq 2n w_n e^{w_n} \leq \left(\frac{(2n+3)!}{2} \right)^{1/(2n)}.$$

Or $(2n+3)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)(2n+3) \leq (2n)!(2n+3)^3$. En divisant par $2n$:

$$\frac{((2n)!)^{1/(2n)}}{2n} \leq w_n e^{w_n} \leq \left(\frac{(2n+3)^3}{2} \right)^{1/(2n)} \frac{((2n)!)^{1/(2n)}}{2n}.$$

- b) D'après 9.d (appliquée à la sous-suite d'indices pairs), $\frac{((2n)!)^{1/(2n)}}{2n} \rightarrow e^{-1}$. De plus

$$\left(\frac{(2n+3)^3}{2} \right)^{1/(2n)} = \exp\left(\frac{3 \ln(2n+3) - \ln 2}{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

par croissances comparées. Par encadrement, $w_n e^{w_n} \rightarrow e^{-1}$. En prenant le logarithme (continu sur $\mathbb{R}_+^*$), $\ln(w_n) + w_n \rightarrow -1$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(w_n) = 0.$$

D'après la question 10, g est une bijection continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$; sa réciproque g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité de g^{-1} en 0 :

$$w_n = g^{-1}(g(w_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \alpha.$$

14. Équivalent de u_n .

$\frac{u_n}{2\alpha n} = \frac{w_n}{\alpha} \rightarrow 1$, avec $\alpha > 0$:

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\alpha n, \quad \alpha \in]e^{-2}, e^{-1}[\text{ solution de } \alpha + \ln \alpha + 1 = 0.$$

Numériquement $2\alpha \approx 0,557$, en accord avec la conjecture de la question 5.c.

Problème 2

Problème 2 – Partie I – Un produit scalaire

$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$; polynômes orthonormaux Q_k , matrice de Gram $H_n = {}^t A_n A_n$.

Corrigé – Problème 2.

1. Convergence.

$t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, par croissances comparées, $t^2 P(t)e^{-t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$: $P(t)e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann), donc $\int_0^{+\infty} |P(t)|e^{-t} dt$ converge par comparaison de fonctions positives.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \text{ converge (absolument).}}$$

2. Les intégrales I_k .

a) Soit $A > 0$. On intègre par parties avec $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, $u'(t) = (k+1)t^k$, $v'(t) = e^{-t}$:

$$\begin{aligned} \int_0^A t^{k+1} e^{-t} dt &= [-t^{k+1} e^{-t}]_0^A + (k+1) \int_0^A t^k e^{-t} dt \\ &= -A^{k+1} e^{-A} + (k+1) \int_0^A t^k e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, $A^{k+1} e^{-A} \rightarrow 0$ (croissances comparées), et les intégrales convergent (question 1) :

$$\boxed{I_{k+1} = (k+1)I_k.}$$

b) $I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 = 0!$, et si $I_k = k!$, alors $I_{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!$. Par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = k!}$$

3. Produit scalaire.

D'après 1 appliquée à PQ , $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.

- Symétrie : évidente.
- Bilinéarité : par linéarité des intégrales convergentes, $\langle P_1 + \lambda P_2, Q \rangle = \langle P_1, Q \rangle + \lambda \langle P_2, Q \rangle$; avec la symétrie, l'application est bilinéaire.
- Positivité : $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$, donc $\langle P, P \rangle \geq 0$.
- Caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$, continue et positive sur $[0, +\infty[$, est d'intégrale nulle, donc nulle sur $[0, +\infty[$; ainsi P admet une infinité de racines et $P = 0$.

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

4. Produits scalaires des monômes.

$$\boxed{\langle X^i, X^j \rangle = I_{i+j} = (i+j)!, \quad \|X^i\| = \sqrt{(2i)!}.}$$

5. Les polynômes Q_k .

- a) Q_0 est une constante $c > 0$ avec $\|Q_0\|^2 = c^2 I_0 = c^2 = 1 : Q_0 = 1$.
 $Q_1 = aX + b$ avec $a > 0 : \langle Q_1, Q_0 \rangle = aI_1 + bI_0 = a + b = 0$, donc $Q_1 = a(X - 1)$,
et $\|Q_1\|^2 = a^2(I_2 - 2I_1 + I_0) = a^2$, d'où $a = 1$.

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = X - 1.$$

Soit $R = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$, de degré 2 et de coefficient dominant $\frac{1}{2} > 0$. On a

$$\langle R, 1 \rangle = \frac{1}{2}I_2 - 2I_1 + I_0 = 1 - 2 + 1 = 0, \quad \langle R, X \rangle = \frac{1}{2}I_3 - 2I_2 + I_1 = 3 - 4 + 1 = 0,$$

donc R est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(Q_0, Q_1)$, et $\|R\|^2 = \langle R, \frac{1}{2}X^2 \rangle = \frac{1}{4}I_4 - I_3 + \frac{1}{2}I_2 = 6 - 6 + 1 = 1$. Or Q_2 est, lui aussi, un vecteur unitaire de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$; l'orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension $3 - 2 = 1$, donc $Q_2 = \pm R$, et la condition sur le coefficient dominant impose $Q_2 = R$.

$$Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1.$$

- b) $\mathcal{C}_k$ est une famille orthonormale, donc libre, de $k + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ (chaque Q_j , $j \leq k$, est de degré $j \leq k$), espace de dimension $k + 1$.

$$\mathcal{C}_k = (Q_0, \dots, Q_k) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X].$$

6. Le cas $n = 2$.

- a) $h_{i,j} = (i + j - 2)!$:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Notons K la matrice proposée. Un calcul direct donne

$$H_2 K = \begin{pmatrix} 3 - 3 + 1 & -3 + 5 - 2 & \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ 3 - 6 + 3 & -3 + 10 - 6 & \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} \\ 6 - 18 + 12 & -6 + 30 - 24 & 1 - 6 + 6 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$H_2 \text{ est inversible et } H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) $1 = Q_0$, $X = Q_1 + Q_0$ et $X^2 = 2Q_2 + 4X - 2 = 2Q_2 + 4Q_1 + 2Q_0$. Les colonnes de A_2 sont les coordonnées de $1, X, X^2$ dans $\mathcal{C}_2$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t A_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

$${}^t A_2 A_2 = H_2.$$

7. Cas général.

a) A_n est la matrice de la base $\mathcal{B}_n$ dans la base $\mathcal{C}_n$ (matrice de passage) :

$$A_n \text{ est inversible.}$$

b) La j -ième colonne de A_n contient les coordonnées de X^{j-1} dans $\mathcal{C}_n = (Q_0, \dots, Q_n)$:

$$X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j} Q_{k-1}.$$

Par bilinéarité, puis parce que $\langle Q_{k-1}, Q_{l-1} \rangle$ vaut 1 si $k = l$ et 0 sinon :

$$\langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{k,i} a_{l,j} \langle Q_{k-1}, Q_{l-1} \rangle, \quad \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i} a_{k,j}.$$

c) Le coefficient (i, j) de ${}^t A_n A_n$ est $\sum_k ({}^t A_n)_{i,k} (A_n)_{k,j} = \sum_k a_{k,i} a_{k,j} = h_{i,j}$:

$$H_n = {}^t A_n A_n.$$

8. Propriétés de H_n .

a) ${}^t A_n$ et A_n sont inversibles, donc leur produit l'est :

$$H_n \text{ est inversible.}$$

b) $h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = h_{j,i}$: H_n est symétrique réelle. D'après le théorème spectral,

$$H_n \text{ est diagonalisable.}$$

c) Soit λ une valeur propre et Y un vecteur propre associé. Alors ${}^t Y H_n Y = \lambda {}^t Y Y = \lambda \|Y\|^2$ (norme usuelle de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$) et ${}^t Y H_n Y = {}^t (A_n Y) (A_n Y) = \|A_n Y\|^2$.

Comme A_n est inversible et $Y \neq 0$, $A_n Y \neq 0$, donc $\lambda = \frac{\|A_n Y\|^2}{\|Y\|^2} > 0$.

$$\text{Les valeurs propres de } H_n \text{ sont strictement positives.}$$

Problème 2 – Partie II – Une projection

Projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_n[X]$ via H_n^{-1} ; application à X^3 et lien avec un problème d'optimisation.

Corrigé – Problème 2.**1. Caractérisation du projeté.**

a) $R = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$; par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\langle R, X^i \rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle X^i, X^k \rangle.$$

b) Le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ est l'unique $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - R$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$, $P - R \perp \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\langle P - R, X^i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$R = p_{\mathbb{R}_n[X]}(P) \iff \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \langle P, X^i \rangle = \langle R, X^i \rangle.$$

D'après a), $\langle R, X^i \rangle = \sum_k h_{i+1, k+1} \alpha_k$ est le coefficient d'indice $i+1$ de $H_n V$, et $\langle P, X^i \rangle$ est celui de U . La condition équivaut donc à $H_n V = U$, soit, H_n étant inversible :

$$R = p_{\mathbb{R}_n[X]}(P) \iff V = H_n^{-1} U.$$

2. Projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Ici $U = (\langle X^3, 1 \rangle, \langle X^3, X \rangle, \langle X^3, X^2 \rangle)^t = (3!, 4!, 5!)^t = (6, 24, 120)^t$, et

$$V = H_2^{-1} U = \begin{pmatrix} 18 - 72 + 60 \\ -18 + 120 - 120 \\ 3 - 24 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = 9X^2 - 18X + 6.$$

3. Méthode d'optimisation.

a) $f(a, b, c) = \|a + bX + cX^2 - X^3\|^2$. En développant par bilinéarité et avec $\langle X^i, X^j \rangle = (i+j)!$:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a^2 I_0 + b^2 I_2 + c^2 I_4 + I_6 + 2ab I_1 + 2ac I_2 + 2bc I_3 - 2a I_3 - 2b I_4 - 2c I_5 \\ &= a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 720 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c. \end{aligned}$$

$$f(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c + 720.$$

b) f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, et

$$\partial_1 f = 2a + 2b + 4c - 12, \quad \partial_2 f = 2a + 4b + 12c - 48, \quad \partial_3 f = 4a + 12b + 48c - 240.$$

Un point critique vérifie donc $a + b + 2c = 6$, $a + 2b + 6c = 24$, $2a + 6b + 24c = 120$, c'est-à-dire

$$H_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

H_2 étant inversible, ce système a une unique solution :

$$f \text{ admet un unique point critique } (a_0, b_0, c_0) = (6, -18, 9).$$

- c) Les dérivées secondes sont constantes : $\partial_{1,1}^2 f = 2$, $\partial_{2,2}^2 f = 4$, $\partial_{3,3}^2 f = 48$, $\partial_{1,2}^2 f = 2$, $\partial_{1,3}^2 f = 4$, $\partial_{2,3}^2 f = 12$.

$$\nabla^2 f(a_0, b_0, c_0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 48 \end{pmatrix} = 2H_2.$$

- d) Les valeurs propres de $2H_2$ sont le double de celles de H_2 , donc strictement positives (question 8.c de la partie I). Le point critique (a_0, b_0, c_0) est donc un point de minimum local.

$$f \text{ admet un minimum local en } (a_0, b_0, c_0).$$

- e) L'application $(a, b, c) \mapsto a + bX + cX^2$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ et $f(a, b, c) = \|X^3 - (a + bX + cX^2)\|^2$, donc

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} f(a, b, c) = \inf_{R \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - R\|^2.$$

Notons $p = p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$. Pour $R \in \mathbb{R}_2[X]$, $X^3 - p \perp p - R$, et par le théorème de Pythagore

$$\|X^3 - R\|^2 = \|X^3 - p\|^2 + \|p - R\|^2 \geq \|X^3 - p\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $R = p$. La borne inférieure est donc un minimum, atteint uniquement en $R = p$:

$$f \text{ admet un minimum global sur } \mathbb{R}^3, \text{ atteint en un unique point.}$$

Ce point est le triplet des coordonnées de p dans la base $(1, X, X^2)$.

- f) Un point de minimum global de f sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ est un point critique ; le seul point critique est $(6, -18, 9)$. Donc les coefficients de p sont $(6, -18, 9)$:

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = 6 - 18X + 9X^2,$$

ce qui confirme le résultat de la question 2.