

HEC – ESSEC

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2020

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. Les quatre parties sont largement indépendantes.

Partie I – Résolution d'une équation différentielle scalaire

Partie I – Équation $f' = rf^2(1-f)$

On étudie $u(t) = \frac{t}{1-t}e^{-1/t}$, la bijection φ de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}_+$ qui en découle, puis les solutions à valeurs dans $]0, 1[$ de $f' = rf^2(1-f)$.

Corrigé – Partie I.

1. Étude de u .

- a) Lorsque $t \rightarrow 0^+$, on a $-1/t \rightarrow -\infty$ donc $e^{-1/t} \rightarrow 0$, et $\frac{t}{1-t} \rightarrow 0$; par produit, $u(t) \rightarrow 0$.

Lorsque $t \rightarrow 0^-$, posons $s = -1/t$, de sorte que $s \rightarrow +\infty$ et $t = -1/s$. Alors $te^{-1/t} = -\frac{e^s}{s} \rightarrow -\infty$ par croissances comparées, et $\frac{1}{1-t} \rightarrow 1$. Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = -\infty.$$

- b) u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ comme produit et composée de fonctions dérivables. Avec $\left(\frac{t}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $(e^{-1/t})' = \frac{1}{t^2}e^{-1/t}$:

$$u'(t) = e^{-1/t} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{t(1-t)} \right) = e^{-1/t} \frac{t + (1-t)}{t(1-t)^2} = \frac{e^{-1/t}}{t(1-t)^2}.$$

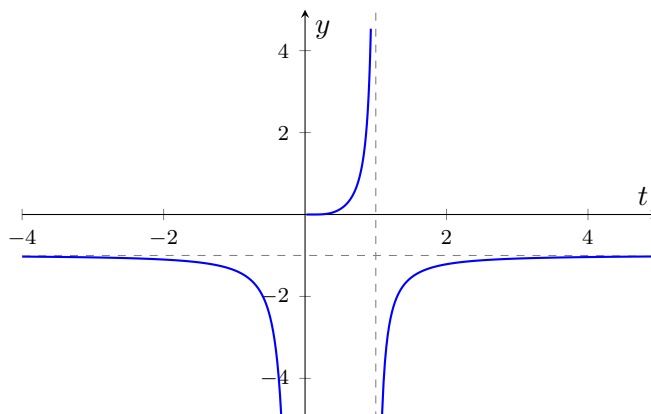
$$P(t) = t(1-t)^2.$$

- c) $u'(t)$ est du signe de t : u est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Limites : en $\pm\infty$, $\frac{t}{1-t} \rightarrow -1$ et $e^{-1/t} \rightarrow 1$, donc $u(t) \rightarrow -1$; en 1^- , $u(t) \sim \frac{e^{-1}}{1-t} \rightarrow +\infty$; en 1^+ , $u(t) \rightarrow -\infty$. Les limites en 0 ont été vues en a).

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$u'(t)$	–	+	+	
u	–1 ↘ –∞	–∞ ↗ 0	0 ↗ +∞	–1 ↗ –∞

La droite $y = -1$ est asymptote en $\pm\infty$ (la courbe est en dessous sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$), la droite $x = 1$ est asymptote verticale, ainsi que $x = 0$ à gauche ; à droite de 0 la courbe part de l'origine avec une tangente horizontale (car $u'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, voir 2.b).



2. La fonction φ .

- a) D'après 1.a, φ est continue en 0 (à droite), et elle est continue sur $]0, 1[$; elle est donc continue sur $[0, 1[$. Elle est strictement croissante sur $]0, 1[$ et $\varphi(t) > 0 = \varphi(0)$ pour $t \in]0, 1[$, donc strictement croissante sur $[0, 1[$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t) = +\infty$, le théorème de la bijection montre que

φ réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}_+$.

- b) Sur $]0, 1[$, $\varphi = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En 0 : pour $t \in]0, 1[$,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{e^{-1/t}}{1 - t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0,$$

donc φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$. De plus, en posant $s = 1/t \rightarrow +\infty$,
 $\varphi'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t(1-t)^2} = \frac{s e^{-s}}{(1-t)^2} \rightarrow 0 = \varphi'(0)$ par croissances comparées : φ' est continue en 0.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, avec $\varphi'(0) = 0$.

- c) Sur $\mathbb{R}_+^* = \varphi([0, 1[)$, φ' ne s'annule pas sur $]0, 1[$, donc φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$.

En revanche, si φ^{-1} était dérivable en 0, en dérivant $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$ en 0 on obtiendrait $(\varphi^{-1})'(0)\varphi'(0) = 1$, ce qui est impossible puisque $\varphi'(0) = 0$.

φ^{-1} n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (elle n'est pas dérivable en 0).

Sa courbe admet en l'origine une tangente verticale.

- d) La courbe de φ^{-1} est la symétrique de celle de φ par rapport à la droite $y = x$: il suffit de tracer les points $(\varphi(t), t)$ pour t parcourant $[0, 1[$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.linspace(0, 0.9, 500)
x = np.zeros(500)          # x[0] = phi(0) = 0
for i in range(1, 500):
    x[i] = t[i]/(1-t[i]) * np.exp(-1/t[i]) # x[i] = phi(t[i])
plt.plot(x, t)             # points (phi(t), t)
plt.show()

```

3. Résolution de l'équation (1).

- a) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]0, 1[$, et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$: par composition, $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in]0, 1[$,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{e^{-1/x}}{x(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{x e^{-1/x}} = \frac{1}{x^2(1-x)},$$

d'où

$$(\ln \circ \varphi \circ f)' = \frac{f'}{f^2(1-f)}.$$

- b) *Unicité.* Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, vérifiant (1) et $f(0) = a$. Alors $f' = r f^2(1-f)$ est continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après a), $(\ln \circ \varphi \circ f)' = r$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc pour tout t ,

$$\ln \varphi(f(t)) = \ln \varphi(a) + rt, \quad \text{soit} \quad \varphi(f(t)) = \varphi(a)e^{rt}.$$

Comme $f(t) \in]0, 1[$ et $\varphi(a)e^{rt} \in \mathbb{R}_+$, on obtient $f(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{rt}) = f_a(t)$.

Existence. Pour tout t , $\varphi(a)e^{rt} \in \mathbb{R}_+^*$, donc $f_a(t) \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]0, 1[$. Comme φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (question 2.c), f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\ln \varphi(f_a(t)) = \ln \varphi(a) + rt$. En dérivant à l'aide de a) :

$$\frac{f'_a}{f_a^2(1-f_a)} = r, \quad \text{soit} \quad f'_a = r f_a^2(1-f_a).$$

Enfin $f_a(0) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a$.

$$f_a : t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{rt}) \text{ est l'unique solution de (1) à valeurs dans }]0, 1[\text{ telle que } f(0) = a.$$

4. Cas $r > 0$.

- a) Pour tout t , $f'_a(t) = r f_a(t)^2(1-f_a(t)) > 0$ car $f_a(t) \in]0, 1[$: f_a est strictement croissante.

φ^{-1} est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1[$, avec $\varphi^{-1}(0) = 0$ et $\varphi^{-1}(y) \rightarrow 1$ quand $y \rightarrow +\infty$. Comme $\varphi(a)e^{rt} \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $\rightarrow +\infty$ en $+\infty$ (car $r > 0$ et $\varphi(a) > 0$), par composition :

$$f_a \text{ strictement croissante, } \lim_{-\infty} f_a = 0, \quad \lim_{+\infty} f_a = 1.$$

b) f'_a est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables, et

$$f''_a = r(2f_a - 3f_a^2)f'_a.$$

Comme $r = \frac{f'_a}{f_a^2(1-f_a)}$, on peut aussi écrire

$$f''_a = r f_a (2 - 3f_a) f'_a = \frac{(2 - 3f_a)(f'_a)^2}{f_a(1 - f_a)}.$$

Puisque $f_a > 0$ et $f'_a > 0$, $f''_a(t)$ est du signe de $2 - 3f_a(t)$. Or f_a est continue, strictement croissante, de limites 0 et 1 : elle prend la valeur $2/3$ en un unique réel t_a , et $f''_a > 0$ sur $] -\infty, t_a[$, $f''_a < 0$ sur $]t_a, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe uniquement en t_a :

la courbe de f_a a un unique point d'inflexion, d'ordonnée $2/3$.

c) Le point d'inflexion est $(t_a, 2/3)$ avec $\varphi(2/3) = \varphi(a)e^{rt_a}$, soit

$$t_a = \frac{1}{r}(\ln \varphi(2/3) - \ln \varphi(a)) = \frac{1}{r}(\ln 2 - \frac{3}{2} - \ln \varphi(a)).$$

Lorsque a décrit $]0, 1[$, $\varphi(a)$ décrit $\mathbb{R}_+^*$ (bijection), donc $\ln \varphi(a)$ décrit $\mathbb{R}$, et t_a décrit $\mathbb{R}$.

L'ensemble des points d'inflexion est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$.

La pente de la tangente en ce point vaut $f'_a(t_a) = r \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4r}{27}$, indépendante de a :

les tangentes aux points d'inflexion sont toutes parallèles, de pente $\frac{4r}{27}$.

(On a d'ailleurs $f_a(t) = f_{2/3}(t - t_a)$: les courbes se déduisent les unes des autres par translation horizontale.)

Partie II – Étude d'une fonction de deux variables

Partie II – La fonction K

$K(x, y) = x \ln \frac{x}{y} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-y}$ sur $]0, 1[^2$: minimum, hessienne, minoration $K(x, y) \geq 2(x-y)^2$, lignes de niveau.

Corrigé – Partie II.

5. Premières propriétés.

a) Pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$K(x, y) = x \ln x - x \ln y + (1-x) \ln(1-x) - (1-x) \ln(1-y).$$

Les fonctions $(x, y) \mapsto x, y, 1-x, 1-y$ sont polynomiales, strictement positives sur $]0, 1[^2$, et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, produits et sommes,

$$K \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, 1[^2.$$

b)

$$\partial_2 K(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{1-x}{1-y} = \frac{-x(1-y) + (1-x)y}{y(1-y)} = \frac{y-x}{y(1-y)}.$$

c) Comme $y(1-y) > 0$, $\partial_2 K(x, y)$ est du signe de $y-x$. Pour $x \in]0, 1[$ fixé, la fonction $y \mapsto K(x, y)$ est donc décroissante sur $]0, x]$ et croissante sur $[x, 1[$: elle admet un minimum en $y = x$, égal à $K(x, x) = x \ln 1 + (1-x) \ln 1 = 0$. Ainsi $K(x, y) \geq K(x, x) = 0$ pour tout (x, y) :

$$K \text{ admet un minimum global égal à } 0, \text{ atteint sur la diagonale } y = x.$$

d) Pour $x = \frac{1}{2}$ fixé, $K(\frac{1}{2}, y) = -\frac{1}{2} \ln(4y(1-y)) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow 0^+$.

$$K \text{ n'est pas majorée.}$$

6. Hessienne.

a) $\partial_1 K(x, y) = \ln x + 1 - \ln y - \ln(1-x) - 1 + \ln(1-y) = \ln \frac{x}{y} - \ln \frac{1-x}{1-y}$. D'où

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 K(x, y) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}, & \partial_{2,2}^2 K(x, y) &= \frac{x}{y^2} + \frac{1-x}{(1-y)^2}, \\ \partial_{1,2}^2 K(x, y) &= \partial_{2,1}^2 K(x, y) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y} = -\frac{1}{y(1-y)}. \end{aligned}$$

(Les dérivées croisées sont égales d'après le théorème de Schwarz, K étant $\mathcal{C}^2$.)

b) $q_{(x,y)}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 K(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_{1,1}^2 K(x, y) = \frac{1}{x(1-x)}$. Or $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, et $x(1-x) > 0$, donc

$$q_{(x,y)}(1, 0) \geq 4.$$

7. Minoration de K .

- a) Pour $t \in [0, 1]$, $z + tw = (y + t(x - y), y)$; sa première coordonnée est entre x et y , donc $z + tw \in]0, 1[$. Posons $g(t) = K(z + tw) = K(y + t(x - y), y)$ pour $t \in [0, 1]$. La fonction $s \mapsto K(s, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$, de dérivées $\partial_1 K(s, y)$ et $\partial_{1,1}^2 K(s, y)$; par composition avec $t \mapsto y + t(x - y)$, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et

$$g'(t) = (x - y) \partial_1 K(z + tw), \quad g''(t) = (x - y)^2 \partial_{1,1}^2 K(z + tw) = q_{z+tw}(w),$$

la dernière égalité car $w = (x - y, 0)$ donne $q_{z+tw}(w) = (x - y)^2 q_{z+tw}(1, 0)$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 appliquée à g sur $[0, 1]$ donne

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1 - t) g''(t) dt.$$

Or $g(1) = K(x, y)$, $g(0) = K(y, y) = 0$ et $g'(0) = (x - y) \partial_1 K(y, y) = (x - y)(\ln 1 - \ln 1) = 0$. Ainsi

$$K(x, y) = \int_0^1 (1 - t) q_{z+tw}(w) dt.$$

- b) D'après 6.b, $q_{z+tw}(w) = (x - y)^2 q_{z+tw}(1, 0) \geq 4(x - y)^2$ et $1 - t \geq 0$ sur $[0, 1]$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant),

$$K(x, y) \geq 4(x - y)^2 \int_0^1 (1 - t) dt = 4(x - y)^2 \cdot \frac{1}{2}, \quad \boxed{K(x, y) \geq 2(x - y)^2}.$$

8. Représentations graphiques.

- a) On représente par exemple plusieurs sections $y \mapsto K(x, y)$ pour des valeurs de x fixées :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def K(x, y):
    return x*np.log(x/y) + (1-x)*np.log((1-x)/(1-y))
```

```
y = np.linspace(0.01, 0.99, 500)
for x in [0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9]:
    plt.plot(y, K(x, y)) # section y -> K(x,y)
plt.show()
```

Chaque courbe est positive, s'annule en $y = x$ et tend vers $+\infty$ aux bords, ce qui illustre la question 5.

- b) Pour $(x, y) \in]0, 1[^2$, $(1 - x, 1 - y) \in]0, 1[^2$ et

$$K(1 - x, 1 - y) = (1 - x) \ln \frac{1 - x}{1 - y} + x \ln \frac{x}{y} = K(x, y).$$

Ainsi, si (x, y) appartient à la ligne de niveau $\{K = c\}$, son symétrique $(1 - x, 1 - y)$ par rapport au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (milieu de (x, y) et $(1 - x, 1 - y)$) y appartient aussi.

Chaque ligne de niveau admet le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour centre de symétrie.

Partie III – Divergence de Kullback

Partie III – Divergence $d(X)$

$d(X) = \sum_x Q^*([X = x]) \ln \frac{Q^*([X=x])}{Q([X=x])}$: exemple poissonnien, positivité via l'inégalité de Jensen, $d(X) \geq d(g(X))$ et inégalité de Pinsker.

Corrigé – Partie III.

Notations. Pour $x \in X(\mathbb{N})$, on note $q_x^* = Q^*([X = x])$ et $q_x = Q([X = x])$. Si $x \in X(\mathbb{N})$, il existe n tel que $X(n) = x$, donc $q_x^* \geq Q^*([n]) > 0$ et de même $q_x > 0$: tous les termes de $d(X)$ sont bien définis. De plus les événements $[X = x]$, $x \in X(\mathbb{N})$, forment un système complet d'événements, donc $\sum_x q_x^* = \sum_x q_x = 1$. On dira que $d(X)$ existe lorsque la famille $(q_x^* \ln(q_x^*/q_x))_{x \in X(\mathbb{N})}$ est sommable (série absolument convergente si $X(\mathbb{N})$ est infini).

9. Un exemple poissonnien.

- a) D'après la remarque préliminaire, toute valeur de X a une probabilité non nulle pour Q^* ; sous Q^* , X suit une loi de Poisson, donc $X(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, et chaque $k \in \mathbb{N}$ vérifie $Q^*([X = k]) > 0$, donc $X(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$q_k^* \ln \frac{q_k^*}{q_k} = q_k^* \ln \left(e^{\lambda - \lambda^*} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right)^k \right) = (\lambda - \lambda^*) q_k^* + \ln \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right) k q_k^*.$$

Les séries $\sum q_k^*$ et $\sum k q_k^*$ convergent absolument (termes positifs, X admet une espérance λ^* pour Q^*), donc $d(X)$ existe et

$$d(X) = (\lambda - \lambda^*) \cdot 1 + \ln \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right) \lambda^*, \quad \boxed{d(X) = -\lambda^* \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right) + \lambda - \lambda^*}.$$

- b) Posons $h = \lambda/\lambda^* > 0$, $h \neq 1$. Alors $d(X) = \lambda^*(h - 1 - \ln h)$. Par stricte concavité de $\ln$ (courbe strictement sous sa tangente en 1 hors du point de contact), $\ln h < h - 1$, donc

$$\boxed{d(X) > 0}.$$

Posons $\varepsilon = \frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda^*} \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \lambda^*$. Par développement limité, $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$, donc

$$d(X) = \lambda^*(\varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)) = \lambda^* \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) = \frac{(\lambda - \lambda^*)^2}{2\lambda^*} + o((\lambda - \lambda^*)^2).$$

$$\boxed{d(X) \sim \frac{(\lambda - \lambda^*)^2}{2\lambda^*}, \text{ donc } d(X) = o(\lambda - \lambda^*) \text{ quand } \lambda \rightarrow \lambda^*}.$$

10. Inégalité de Jensen.

- a) U prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $U(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{E}(U) = \sum_{x \in U(\Omega)} x P([U = x])$. Tous les termes sont positifs, et ils ne sont pas tous nuls car $\sum_x P([U = x]) = 1$: il existe $x > 0$ avec $P([U = x]) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(U) > 0}.$$

- b) Notons $m = \mathbb{E}(U) \in]0, +\infty[$. Une fonction convexe et dérivable sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes, d'où

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) - \psi(m) \geq \psi'(m)(x - m).$$

- c) Comme $U(\omega) > 0$ pour tout ω , b) donne $\psi(U) - \psi(m) \geq \psi'(m)(U - m)$. Les deux membres admettent une espérance ; par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\psi(U)) - \psi(m) \geq \psi'(m)(\mathbb{E}(U) - m) = 0, \quad \boxed{\psi(\mathbb{E}(U)) \leq \mathbb{E}(\psi(U)).}$$

- d) La fonction $\psi = -\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $]0, +\infty[$ ($\ln$ est concave). On travaille sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), Q^*)$ et on pose $U = h(X)$ avec $h(x) = \frac{q_x}{q_x^*}$ pour $x \in X(\mathbb{N})$. U est discrète et strictement positive. Par le théorème de transfert, la série (ou somme finie) $\sum_x h(x)q_x^* = \sum_x q_x$ converge absolument et vaut 1 : $\mathbb{E}(U) = 1$. De même, si $d(X)$ existe,

$$\mathbb{E}(\psi(U)) = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} q_x^* \left(-\ln \frac{q_x}{q_x^*} \right) = d(X).$$

L'inégalité c) donne $-\ln(1) \leq d(X)$:

$$\boxed{d(X) \geq 0.}$$

11. Comparaison de $d(X)$ et $d(g(X))$.

- a) Pour $y \in Y(\mathbb{N})$, l'événement $[Y = y]$ est la réunion disjointe des $[X = x]$ pour $x \in g^{-1}(\{y\})$, et les ensembles $g^{-1}(\{y\})$, $y \in Y(\mathbb{N})$, forment une partition de $X(\mathbb{N})$. En particulier $Q^*([Y = y]) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} q_x^* > 0$ et de même pour Q . Pour $x \in g^{-1}(\{y\})$, $[X = x] \subset [Y = y]$, donc

$$Q_{[Y=y]}^*([X = x]) = \frac{q_x^*}{Q^*([Y = y])}, \quad Q_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{q_x}{Q([Y = y])},$$

$$\ln \frac{Q_{[Y=y]}^*([X = x])}{Q_{[Y=y]}([X = x])} = \ln \frac{q_x^*}{q_x} - \ln \frac{Q^*([Y = y])}{Q([Y = y])}.$$

Notons S le second terme du membre de droite de l'égalité demandée (sommes finies). Comme $Q^*([Y = y])Q_{[Y=y]}^*([X = x]) = q_x^*$,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} q_x^* \left(\ln \frac{q_x^*}{q_x} - \ln \frac{Q^*([Y = y])}{Q([Y = y])} \right) \\ &= \sum_{x \in X(\mathbb{N})} q_x^* \ln \frac{q_x^*}{q_x} - \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} \ln \frac{Q^*([Y = y])}{Q([Y = y])} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} q_x^* \\ &= d(X) - \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} Q^*([Y = y]) \ln \frac{Q^*([Y = y])}{Q([Y = y])} = d(X) - d(Y). \end{aligned}$$

$$\boxed{d(X) = d(Y) + \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} Q^*([Y = y]) \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q_{[Y=y]}^*([X = x]) \ln \frac{Q_{[Y=y]}^*([X = x])}{Q_{[Y=y]}([X = x])}.$$

- b) Fixons $y \in Y(\mathbb{N})$ et notons, pour $x \in A = g^{-1}(\{y\})$, $a_x = Q_{[Y=y]}^*([X = x]) > 0$ et $b_x = Q_{[Y=y]}([X = x]) > 0$; on a $\sum_{x \in A} a_x = \sum_{x \in A} b_x = 1$. Par concavité de $\ln$, $\ln s \leq s - 1$ pour $s > 0$, donc $\ln \frac{a_x}{b_x} = -\ln \frac{b_x}{a_x} \geq 1 - \frac{b_x}{a_x}$ et

$$\sum_{x \in A} a_x \ln \frac{a_x}{b_x} \geq \sum_{x \in A} (a_x - b_x) = 0.$$

Chaque somme intérieure est positive et $Q^*([Y = y]) > 0$, donc d'après a),

$$\boxed{d(X) \geq d(Y)}.$$

12. Inégalité de Pinsker.

- a) On note $p^* = Q^*([X \in B]) = \sum_{x \in B} q_x^*$ et $p = Q([X \in B]) = \sum_{x \in B} q_x$.
 $B \neq \emptyset$: sinon $q_x > q_x^*$ pour tout x , et en sommant $1 > 1$. $B \neq X(\mathbb{N})$: sinon $q_x \leq q_x^*$ pour tout x avec $\sum_x (q_x^* - q_x) = 0$, donc $q_x = q_x^*$ pour tout x , ce qui contredit l'hypothèse. Comme tous les q_x, q_x^* sont strictement positifs et de somme 1, on obtient

$$\boxed{0 < Q^*([X \in B]) < 1 \quad \text{et} \quad 0 < Q([X \in B]) < 1}.$$

Ensuite, en notant $\bar{B} = X(\mathbb{N}) \setminus B$,

$$\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |q_x - q_x^*| = \sum_{x \in B} (q_x^* - q_x) + \sum_{x \in \bar{B}} (q_x - q_x^*) = (p^* - p) + ((1 - p) - (1 - p^*)) = 2(p^* - p),$$

$$\boxed{\left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2 = 4(Q([X \in B]) - Q^*([X \in B]))^2}.$$

- b) $Y = \mathbf{1}_{\{X \in B\}}$ prend les valeurs 1 (sur $[X \in B]$, non vide) et 0 (sur $[X \in \bar{B}]$, non vide) : $Y(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$, avec $Q^*([Y = 1]) = p^*$, $Q^*([Y = 0]) = 1 - p^*$, $Q([Y = 1]) = p$, $Q([Y = 0]) = 1 - p$. Ainsi, puisque $(p^*, p) \in]0, 1[^2$,

$$d(Y) = p^* \ln \frac{p^*}{p} + (1 - p^*) \ln \frac{1 - p^*}{1 - p}, \quad \boxed{d(Y) = K(Q^*([X \in B]), Q([X \in B]))}.$$

- c) $Y = g(X)$ avec $g = \mathbf{1}_B$. Par 11.b, puis 7.b et a) :

$$d(X) \geq d(Y) = K(p^*, p) \geq 2(p^* - p)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4(p - p^*)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_x |q_x - q_x^*| \right)^2.$$

Si la loi de X est la même pour Q et Q^* , les deux membres sont nuls. Dans tous les cas,

$$\boxed{d(X) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2}.$$

Partie IV – Trajectoires d'une équation différentielle vectorielle

Partie IV – Équation du réplicateur

$f'_i = \langle e_i - f, Rf \rangle f_i$: conservation de T^* , fonction de Lyapunov H , convergence vers x^* , exemple $R = \lambda I + A$.

Corrigé – Partie IV.

13. Une équation scalaire linéaire.

a) V est dérivable de dérivée v , donc $t \mapsto y(t)e^{-V(t)}$ est dérivable et

$$(ye^{-V})' = y'e^{-V} - vy e^{-V} = (y' - vy)e^{-V} = 0.$$

b) $\mathbb{R}$ étant un intervalle, $t \mapsto y(t)e^{-V(t)}$ est constante, égale à $y(0)e^{-V(0)}$:

$$y(t) = y(0)e^{V(t)-V(0)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Si $y(0) = 0$, y est identiquement nulle ;
sinon $y(t)$ est non nul et du signe de $y(0)$ pour tout t .

14. Les trajectoires restent dans T^* .

a) Pour tout t , $\langle e_i - f, Rf \rangle = \langle e_i, Rf \rangle - \langle f, Rf \rangle$. Notons $s = \sum_{i=1}^n f_i$. Comme $\sum_i f_i \langle e_i, Rf \rangle = \langle \sum_i f_i e_i, Rf \rangle = \langle f, Rf \rangle$:

$$s' = \sum_{i=1}^n f'_i = \langle f, Rf \rangle - \langle f, Rf \rangle s = \langle f, Rf \rangle (1 - s).$$

Ainsi $y = 1 - s$ vérifie $y' = vy$ avec $v(t) = -\langle f(t), Rf(t) \rangle$, fonction continue (polynomiale en les f_j , qui sont continues car dérivables). Comme $y(0) = 1 - \sum_i f_i(0) = 0$, la question 13 donne $y = 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n f_i(t) = 1.$$

b) Pour i fixé, $f'_i = v_i f_i$ avec $v_i(t) = \langle e_i - f(t), Rf(t) \rangle$ continue. Comme $f_i(0) > 0$, la question 13.b donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall i, \quad f_i(t) > 0.$$

Ainsi $f(t) \in T^*$ pour tout t ; comme $n \geq 2$, on a même $f_i(t) < 1$, donc $f(t) \in]0, 1[^n$ et $H(f(t))$ est bien défini.

15. La fonction $H \circ f$.

a) Fixons $t \in \mathbb{R}$. Si $f(t) = x^*$, $H(f(t)) = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, construisons deux probabilités sur $\mathbb{N}$ et une variable X comme dans la partie III. On pose

$$X(k) = k + 1 \quad (0 \leq k \leq n - 2), \quad X(k) = n \quad (k \geq n - 1),$$

$$Q^*({k}) = x_{k+1}^*, \quad Q({k}) = f_{k+1}(t) \quad (0 \leq k \leq n-2),$$

$$Q^*({k}) = \frac{x_n^*}{2^{k-n+2}}, \quad Q({k}) = \frac{f_n(t)}{2^{k-n+2}} \quad (k \geq n-1).$$

Ces nombres sont strictement positifs et, comme $\sum_{j \geq 1} 2^{-j} = 1$, de somme $\sum_i x_i^* = 1$ (resp. $\sum_i f_i(t) = 1$) : Q^* et Q sont deux probabilités distinctes sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant $Q^*({k})Q({k}) > 0$. De plus $X(\mathbb{N}) = \llbracket 1, n \rrbracket$ est fini, $Q^*([X = i]) = x_i^*$ et $Q([X = i]) = f_i(t)$, de sorte que $d(X) = H(f(t))$. La question 12.c donne

$$H(f(t)) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t) - x_i^*| \right)^2.$$

- b) Chaque f_i est dérivable et $f'_i = \langle e_i - f, Rf \rangle f_i$ est continue : f_i est de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $]0, 1[$. Comme $H(x) = \sum_i x_i^* \ln x_i^* - \sum_i x_i^* \ln x_i$, $H \circ f = \sum_i x_i^* \ln x_i^* - \sum_i x_i^* \ln f_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$(H \circ f)' = - \sum_{i=1}^n x_i^* \frac{f'_i}{f_i} = - \sum_{i=1}^n x_i^* \langle e_i - f, Rf \rangle = - \left\langle \sum_i x_i^* e_i - \left(\sum_i x_i^* \right) f, Rf \right\rangle.$$

Comme $\sum_i x_i^* = 1$:

$$(H \circ f)'(t) = - \langle x^* - f(t), Rf(t) \rangle.$$

- c) Pour tout t , $f(t) \in T$; d'après (4), $\langle x^* - f(t), Rf(t) \rangle > 0$ si $f(t) \neq x^*$, et ce produit scalaire est nul si $f(t) = x^*$. Donc $(H \circ f)' \leq 0$: $H \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, et minorée par 0 d'après a). Par le théorème de la limite monotone,

$$H \circ f \text{ admet en } +\infty \text{ une limite finie } \ell \geq 0.$$

16. Majoration de H .

Soit $x \in T^*$ et $m = \min\{x_1, \dots, x_n\} > 0$. Par concavité de $\ln$, $\ln s \leq s - 1$ pour $s > 0$; avec $s = x_i^*/x_i$:

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i^* \ln \frac{x_i^*}{x_i} \leq \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\frac{x_i^*}{x_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i).$$

Ensuite, comme $0 < \frac{1}{x_i} \leq \frac{1}{m}$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i^* |x_i^* - x_i| \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2 \right)^{1/2}.$$

Enfin $x_i^* \in [0, 1]$ donne $(x_i^*)^2 \leq x_i^*$, donc $\sum_i (x_i^*)^2 \leq 1$. D'où

$$H(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_n\}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2 \right)^{1/2}.$$

17. Convergence vers x^* .

- a) Soit $t \geq 0$. $H \circ f$ étant décroissante de limite ℓ , $H(f(t)) \geq \ell$. Par la question 16 appliquée à $f(t) \in T^*$, avec $\min_i f_i(t) \geq c$:

$$\ell \leq H(f(t)) \leq \frac{1}{c} \left(\sum_i (f_i(t) - x_i^*)^2 \right)^{1/2}.$$

Comme $c\ell \geq 0$, en élevant au carré :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{i=1}^n (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq c^2 \ell^2.$$

- b) Soit $p > 0$ et $A_p = \{x \in T \mid \langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq p\}$. Si $A_p = \emptyset$, tout $q > 0$ convient. Sinon, T est fermé (défini par des inégalités larges et une égalité portant sur des fonctions continues) et borné (inclus dans $[0, 1]^n$), et A_p est l'intersection de T avec un fermé : A_p est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}^n$. La fonction $x \mapsto \langle x^* - x, Rx \rangle$ est polynomiale donc continue ; d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet sur A_p un minimum q atteint en un point $x_0 \in A_p$. Comme $\|x_0 - x^*\|^2 \geq p > 0$, $x_0 \neq x^*$, et (4) donne $q = \langle x^* - x_0, Rx_0 \rangle > 0$.

$$\exists q > 0, \forall x \in T, \quad \langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq p \implies \langle x^* - x, Rx \rangle \geq q.$$

- c) Supposons $\ell > 0$ et posons $p = c^2 \ell^2 > 0$. D'après a), pour tout $t \geq 0$, $\langle f(t) - x^*, f(t) - x^* \rangle \geq p$ avec $f(t) \in T$, donc d'après b) et 15.b, $(H \circ f)'(t) \leq -q$. En intégrant sur $[0, t]$:

$$H(f(t)) \leq H(f(0)) - qt \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty,$$

ce qui contredit $H \circ f \geq 0$. Donc

$$\ell = 0.$$

Par 15.a, pour tout i et tout t , $0 \leq |f_i(t) - x_i^*| \leq \sum_j |f_j(t) - x_j^*| \leq \sqrt{2H(f(t))} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

0. Par encadrement,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t) = x_i^*.$$

18. Exemple : $R = \lambda I + A$.

- a) On identifie vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et matrices-colonnes, de sorte que $\langle x, y \rangle = {}^t x y$. On a $x^* = \frac{1}{n}U \in T^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$:

- ${}^t x A x$ est un réel, égal à sa transposée ${}^t x {}^t A x = -{}^t x A x$, donc $\langle x, A x \rangle = 0$;
- $\langle x^*, A x \rangle = \frac{1}{n} {}^t U A x = -\frac{1}{n} {}^t (A U) x = 0$ car ${}^t U A = {}^t ({}^t A U) = -{}^t (A U)$.

Ainsi, pour $x \in T$, avec $\langle x^*, x \rangle = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \frac{1}{n}$ et $\|x^*\|^2 = \frac{1}{n}$:

$$\langle x^* - x, R x \rangle = \lambda \langle x^*, x \rangle - \lambda \|x\|^2 = \lambda \left(\frac{1}{n} - \|x\|^2 \right).$$

Or $\|x - x^*\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, x^* \rangle + \|x^*\|^2 = \|x\|^2 - \frac{1}{n}$. Donc

$$\langle x^* - x, R x \rangle = -\lambda \|x - x^*\|^2,$$

qui est strictement positif pour $x \neq x^*$ puisque $\lambda < 0$.

$$x^* = \frac{1}{n}(e_1 + \cdots + e_n) \text{ vérifie (4).}$$

- b) Posons $\Pi(t) = f_1(t) \cdots f_n(t) > 0$ (question 14.b). La fonction $\ln \Pi = \sum_i \ln f_i$ est dérivable et

$$(\ln \Pi)' = \sum_{i=1}^n \frac{f_i'}{f_i} = \sum_{i=1}^n \langle e_i - f, R f \rangle = \langle U - n f, R f \rangle = n \langle x^* - f, R f \rangle \geq 0$$

d'après (4) (ou par a) directement), puisque $f(t) \in T$. Donc $\ln \Pi$ est croissante, et $\Pi = \exp(\ln \Pi)$ aussi :

$$t \mapsto f_1(t)f_2(t) \cdots f_n(t) \text{ est croissante.}$$

c) Soit $c = \Pi(0) > 0$. Pour $t \geq 0$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les $f_j(t)$ sont dans $]0, 1[$, donc

$$f_i(t) \geq f_i(t) \prod_{j \neq i} f_j(t) = \Pi(t) \geq \Pi(0) = c.$$

L'hypothèse de la question 17 est vérifiée, et x^* vérifie (4) d'après a). La question 17.c donne

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t) = \frac{1}{n}.$$