

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2020

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Résolution d'une équation différentielle scalaire	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; systèmes différentiels ; Python.</i>	2
2	Étude d'une fonction de deux variables	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; Python.</i>	3
3	Divergence de Kullback	4
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions d'une variable.</i>	4
4	Trajectoires d'une équation différentielle vectorielle	5
	<i>Thèmes abordés : systèmes différentiels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	5

Les équations étudiées dans ce problème sont utilisées en sciences sociales et en théorie dynamique des jeux pour décrire des processus influencés par un facteur d'imitation. Les quatre parties sont largement indépendantes.

1 Résolution d'une équation différentielle scalaire

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; systèmes différentiels ; Python.

Dans cette partie, r désigne un réel. On détermine les fonctions f à valeurs dans $]0, 1[$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = r(f(t))^2(1 - f(t)). \quad (1)$$

1. On note u l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad u(t) = \frac{t}{1-t} e^{-1/t}.$$

- Justifier que la limite à droite de u en 0 est nulle. Quelle est la limite à gauche de u en 0 ?
- Démontrer qu'il existe un polynôme P , que l'on précisera, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$u'(t) = \frac{1}{P(t)} e^{-1/t}.$$

- Dresser le tableau de variations de u et donner l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2. Soit φ l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- Justifier que φ est bijective.
- L'application φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$?
- L'application φ^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
- Écrire un script Python fournissant une représentation graphique de φ^{-1} .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import brentq

def phi(t):
    return 0.0 if t == 0 else t/(1-t)*np.exp(-1/t)

x = np.linspace(0.0, 8.0, 500)
y = np.array([brentq(lambda t: phi(t)-z, 1e-8, 1-1e-10) if z else 0 for z in x])
plt.plot(x, y); plt.grid(); plt.show()
```

3. a) Démontrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$, la fonction composée $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f et de f' .

- b) Démontrer que, pour tout réel $a \in]0, 1[$, l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, vérifiant (1) et $f(0) = a$ est la fonction f_a donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{rt}).$$

4. Dans cette question, r est strictement positif et $a \in]0, 1[$.
- Démontrer que f_a est monotone. Quelles en sont les limites en $-\infty$ et en $+\infty$?
 - Donner une expression de la dérivée seconde f_a'' à l'aide de f_a' et de f_a . En déduire que la courbe représentative de f_a admet un unique point d'inflexion.
 - Trouver l'ensemble de ces points d'inflexion lorsque a décrit $]0, 1[$. Que peut-on dire des tangentes aux courbes représentatives des fonctions f_a en ces points ?

2 Étude d'une fonction de deux variables

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; Python.

On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad K(x, y) = x \ln \left(\frac{x}{y} \right) + (1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{1 - y} \right). \quad (2)$$

- Justifier que K est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$.
 - Calculer la dérivée partielle $\partial_2 K$.
 - Étudier le signe de $\partial_2 K$ et en déduire que la fonction K admet un minimum global, égal à 0.
 - La fonction K est-elle majorée ?
- Pour tout $(x, y) \in]0, 1[^2$, on note $q_{(x,y)}$ la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 K(x, y)$.
 - Calculer les dérivées partielles d'ordre deux de K .
 - Justifier que, pour tout $(x, y) \in]0, 1[^2$, $q_{(x,y)}(1, 0) \geq 4$.
- Pour un élément (x, y) de $]0, 1[^2$, on pose $z = (y, y)$ et $w = (x - y, 0)$.
 - En utilisant une formule de Taylor, établir l'égalité

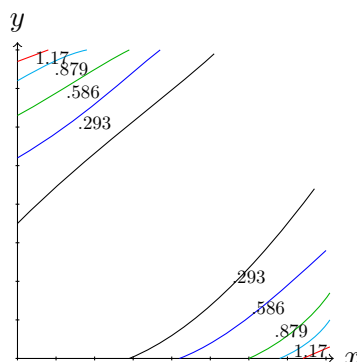
$$K(x, y) = \int_0^1 (1 - t) q_{z+tw}(w) dt.$$

- En déduire l'inégalité $K(x, y) \geq 2(x - y)^2$.
8. a) Écrire un script Python permettant d'obtenir une représentation graphique de la fonction K .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x, y = np.meshgrid(np.linspace(.01, .99, 200), np.linspace(.01, .99, 200))
K = x*np.log(x/y) + (1-x)*np.log((1-x)/(1-y))
plt.contour(x, y, K, levels=[.293, .586, .879, 1.17])
plt.gca().set_aspect('equal'); plt.show()
```

b) La figure suivante représente des lignes de niveau de K .



Chaque ligne de niveau présente un centre de symétrie. Lequel et pourquoi ?

3 Divergence de Kullback

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions d'une variable.

Dans cette partie, Q^* et Q désignent deux probabilités distinctes sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^*({n})Q({n}) > 0.$$

Pour toute variable aléatoire X sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on note

$$d(X) = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} Q^*([X = x]) \ln \left(\frac{Q^*([X = x])}{Q([X = x])} \right),$$

sous réserve que cette somme ait un sens.

9. Un exemple. Dans cette question seulement, λ^* et λ sont deux réels strictement positifs distincts et X suit la loi de Poisson de paramètre λ^* pour Q^* et la loi de Poisson de paramètre λ pour Q .
 - a) Justifier l'existence de $d(X)$ et vérifier $d(X) = -\lambda^* \ln(\lambda/\lambda^*) + \lambda - \lambda^*$.
 - b) Préciser le signe de $d(X)$ et prouver que $d(X)$ est négligeable devant $\lambda - \lambda^*$ lorsque λ tend vers λ^* .
10. Dans cette question, ψ désigne une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $]0, +\infty[$. Soit U une variable aléatoire discrète strictement positive, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que U et $\psi(U)$ admettent chacune une espérance.
 - a) Justifier que $\mathbb{E}(U)$ est strictement positive.
 - b) Pour tout $x > 0$, comparer $\psi(x) - \psi(\mathbb{E}(U))$ et $\psi'(\mathbb{E}(U))(x - \mathbb{E}(U))$.
 - c) En déduire l'inégalité $\psi(\mathbb{E}(U)) \leq \mathbb{E}(\psi(U))$.
 - d) En utilisant la concavité de $\ln$ et l'inégalité précédente, démontrer que, lorsqu'il existe, $d(X)$ est positif ou nul.

Dans les questions 11 et 12, on suppose l'ensemble $X(\mathbb{N})$ fini.

11. Soit g une application de $X(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y(n) = g(X(n))$.

- a) Pour $y \in Y(\mathbb{N})$, on note $g^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ tels que $g(x) = y$. Établir l'égalité

$$d(X) = d(Y) + \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} Q^*([Y = y]) \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q_{[Y=y]}^*([X = x]) \ln \left(\frac{Q_{[Y=y]}^*([X = x])}{Q_{[Y=y]}([X = x])} \right).$$

- b) En déduire l'inégalité $d(X) \geq d(Y)$.

12. Soit B l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ pour lesquels $Q([X = x]) \leq Q^*([X = x])$.

- a) Justifier que $Q^*([X \in B])$ et $Q([X \in B])$ sont strictement compris entre 0 et 1, puis démontrer

$$\left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2 = 4(Q([X \in B]) - Q^*([X \in B]))^2.$$

- b) Vérifier que, si $Y = \mathbf{1}_{\{X \in B\}}$, alors $d(Y) = K(Q^*([X \in B]), Q([X \in B]))$.

- c) Déduire des résultats précédents l'inégalité

$$d(X) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2.$$

4 Trajectoires d'une équation différentielle vectorielle

Thèmes abordés : systèmes différentiels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

On s'intéresse au comportement asymptotique de fonctions qui vérifient une équation généralisant (1) dans un contexte multidimensionnel. Pour $n \geq 2$, on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire usuel. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dont les composantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n f_i(0) = 1, \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_i(0) > 0, \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_i(t) = \langle e_i - f(t), Rf(t) \rangle f_i(t). \end{cases} \quad (3)$$

13. Soit v une fonction continue sur $\mathbb{R}$, V une primitive de v , et y une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y'(t) = v(t)y(t)$.

- a) Calculer la dérivée de $t \mapsto y(t)e^{-V(t)}$.

- b) En déduire que si $y(0)$ est nul, alors $y(t)$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du signe de y si $y(0)$ n'est pas nul ?

14. a) En appliquant ce qui précède à $t \mapsto 1 - \sum_{i=1}^n f_i(t)$, justifier que $\sum_{i=1}^n f_i(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- b) Justifier que, pour tout réel t et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i(t)$ est strictement positif.

On note

$$T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}, \quad T^* = T \cap (\mathbb{R}_+^*)^n.$$

On suppose désormais qu'il existe $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in T^*$ tel que

$$\forall x \in T \setminus \{x^*\}, \quad \langle x^* - x, Rx \rangle > 0. \quad (4)$$

On note H la fonction définie sur $]0, 1[^n$ par

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i^* \ln \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right). \quad (5)$$

15. a) En utilisant le résultat de la question 12, justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$H(f(t)) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t) - x_i^*| \right)^2.$$

b) Justifier que $H \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f , R et x^* .

c) En déduire que $H \circ f$ admet une limite en $+\infty$, notée ℓ .

16. Pour tout $x \in T^*$, établir les inégalités

$$H(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_n\}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2 \right)^{1/2}.$$

17. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i(t) \geq c$.

a) Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité $\sum_{i=1}^n (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq c^2 \ell^2$.

b) Justifier que, pour tout réel $p > 0$, il existe $q > 0$ tel que

$$\forall x \in T, \quad \langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq p \implies \langle x^* - x, Rx \rangle \geq q.$$

c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite ℓ de $H \circ f$ en $+\infty$ est nulle et en déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t) = x_i^*$.

18. Un exemple. On note U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On suppose

$$R = \lambda I + A,$$

où $\lambda < 0$, I est la matrice-identité et A est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AU = 0$.

a) Justifier que $x^* = \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$ vérifie (4).

b) Démontrer que la fonction $t \mapsto f_1(t)f_2(t) \cdots f_n(t)$ est croissante.

c) Justifier que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i(t)$ tend vers $1/n$ quand t tend vers $+\infty$.