

# Concours ECRICOME

Mathématiques approfondies

## Corrigé du sujet adapté – 2021

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. Les notations  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{V}$  désignent l'espérance et la variance,  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### Exercice 1 – Matrices magiques

#### Exercice 1 – Les matrices $A$ , $J$ , $S$ et l'espace $E_n$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  ;  $E_n$  est l'espace des matrices magiques,  $K_n$  celui des matrices magiques de somme nulle.

#### Corrigé – Exercice 1.

##### Partie 1 – Étude de trois matrices

###### 1. La matrice $A$ .

Un calcul direct donne  $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = J - 3I_3$ . Les sommes des lignes de  $A$

sont nulles, donc  $AJ = 0$ , et  $A^3 = A(J - 3I_3) = -3A$ .

Le polynôme  $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$  est annulateur de  $A$  ; sa seule racine réelle est 0,

donc  $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ . Comme  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ , 0 est valeur propre. Si  $A$  était diagonalisable,

elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle : c'est faux.

$$A^3 = -3A, \quad \text{Sp}(A) = \{0\}, \quad A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

###### 2. Les matrices $J$ et $S$ .

$J$  et  $S$  sont symétriques réelles : par le théorème spectral, elles sont diagonalisables.

Les sommes des lignes et des colonnes de  $S$  sont nulles : chaque colonne de  $J$  étant

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a  $SJ = 0$  ; de même  $JS = 0$  (sommes des colonnes de  $S$ ).

$$J, S \text{ diagonalisables,} \quad SJ = JS = 0.$$

###### 3. Vecteurs propres communs.

Soit  $X$  un vecteur propre de  $S$ ,  $SX = \lambda X$ . Alors  $S(JX) = J(SX) = \lambda JX$ , donc  $JX \in E_\lambda(S)$ . Comme  $S$  a trois valeurs propres distinctes dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , chaque sous-espace propre est de dimension 1 :  $E_\lambda(S) = \text{Vect}(X)$ , et  $JX = \mu X$  pour un réel

$\mu$ .

Tout vecteur propre de  $S$  est vecteur propre de  $J$ .

#### 4. Diagonalisation simultanée.

$S$  admet une base  $(X_1, X_2, X_3)$  de vecteurs propres (trois valeurs propres distinctes). Par la question 3, ce sont aussi des vecteurs propres de  $J$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à cette base :

$P^{-1}SP$  et  $P^{-1}JP$  sont diagonales.

### Partie 2 – Étude des matrices magiques

#### 5. Une forme linéaire.

Pour  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\ell_1(\lambda M + \mu N) = \sum_j (\lambda m_{1,j} + \mu n_{1,j}) = \lambda \ell_1(M) + \mu \ell_1(N)$ , et  $\ell_1$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$\ell_1$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 6. Le sous-espace $K_n$ .

$K_n$  est le noyau de la forme linéaire  $s$  restreinte à l'espace vectoriel  $E_n$  :

$K_n = \text{Ker}(s) \cap E_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E_n$ .

#### 7. Transposée d'une matrice magique.

Pour tous  $i, j$  :  $\ell_i({}^tM) = c_i(M)$ ,  $c_j({}^tM) = \ell_j(M)$ ,  $d_1({}^tM) = d_1(M)$  et, avec  $k = n - i + 1$ ,  $d_2({}^tM) = \sum_i m_{n-i+1,i} = \sum_k m_{k,n-k+1} = d_2(M)$ . Toutes ces sommes valent  $s(M)$ .

${}^tM \in E_n$ ,  $s({}^tM) = s(M)$ .

#### 8. Décomposition $M = \lambda J_n + K$ .

$J_n$  est magique de somme  $n$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $M - \lambda J_n \in E_n$  et, par linéarité,  $s(M - \lambda J_n) = s(M) - n\lambda$ , nul si et seulement si  $\lambda = \frac{s(M)}{n}$ .

$\exists! \lambda = \frac{s(M)}{n}, \quad M - \lambda J_n \in K_n.$

#### 9. Un vecteur propre commun.

La  $i$ -ème coordonnée de  $MW_n$  est  $\ell_i(M) = s(M)$ , donc  $MW_n = s(M)W_n$  avec  $W_n \neq 0$  :

$W_n$  est vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $s(M)$ .

### Partie 3 – Le cas $n = 3$

#### 10. Trois matrices magiques.

Pour  $A$  : lignes et colonnes de somme 0,  $d_1(A) = 0$ ,  $d_2(A) = -1 + 0 + 1 = 0$ . Pour  $J$  : toutes les sommes valent 3. Pour  $S$  : lignes et colonnes de somme 0,  $d_1(S) = 1 + 0 - 1 = 0$ ,  $d_2(S) = 0 + 0 + 0 = 0$ .

$A, J, S \in E_3, \quad s(A) = 0, \quad s(J) = 3, \quad s(S) = 0.$

### 11. Parties symétrique et antisymétrique.

Si  $M = M_1 + M_2$  avec  $M_1$  antisymétrique et  $M_2$  symétrique, alors  ${}^tM = -M_1 + M_2$ , d'où  $M_1 = \frac{M - {}^tM}{2}$  et  $M_2 = \frac{M + {}^tM}{2}$  (unicité). Réciproquement, ces matrices conviennent.

$$M_1 = \frac{M - {}^tM}{2}, \quad M_2 = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

### 12. Les matrices de $K_3$ .

a) Par la question 7,  ${}^tM \in E_3$  et  $s({}^tM) = s(M) = 0 : {}^tM \in K_3$ . Comme  $K_3$  est un sous-espace vectoriel :

$$M_1, M_2 \in K_3.$$

b)  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{pmatrix}$  : les sommes des lignes nulles donnent  $q = -p$  et  $r = p$

(les diagonales sont alors nulles), donc  $M_1 = pA$ .  $M_2 = \begin{pmatrix} u & p & q \\ p & v & r \\ q & r & w \end{pmatrix} : d_2(M_2) = 2q + v = 0$  donne  $v = -2q$  ; les lignes donnent  $u = -p - q$ ,  $p + r = 2q$ ,  $w = -q - r$  ; enfin  $d_1 = u + v + w = -(p + r) - 4q = -6q = 0$ . Donc  $q = v = 0$ ,  $r = -p$ ,  $u = -p$ ,  $w = p$ , et  $M_2 = -pS$ .

$$M_1 = \alpha A, \quad M_2 = \beta S.$$

### 13. Bases de $K_3$ et $E_3$ .

Par 12,  $K_3 \subset \text{Vect}(A, S)$ , et  $A, S \in K_3 : K_3 = \text{Vect}(A, S)$ . Si  $aA + bS = 0$ , en transposant  $-aA + bS = 0$ , donc  $aA = bS = 0$  et  $a = b = 0$ . Par 8, toute  $M \in E_3$  s'écrit  $\lambda J + K$  avec  $K \in K_3 : E_3 = \text{Vect}(A, J, S)$ . Si  $aA + bS + cJ = 0$ , en appliquant  $s : 3c = 0$ , puis  $a = b = 0$ .

$$(A, S) \text{ base de } K_3, \quad (A, J, S) \text{ base de } E_3 \text{ (dim } E_3 = 3).$$

### 14. Matrices magiques diagonalisées par $P$ .

$J$  et  $S$  appartiennent à  $\Delta$  (question 4), et  $\Delta$  est stable par combinaison linéaire. Réciproquement, soit  $M = aA + bJ + cS \in \Delta$ . Alors  $aP^{-1}AP = P^{-1}MP - bP^{-1}JP - cP^{-1}SP$  est diagonale ; si  $a \neq 0$ ,  $A$  serait diagonalisable, ce qui contredit la question 1. Donc  $a = 0$ .

$$\Delta = \text{Vect}(J, S).$$

## Exercice 2 – Extrema d'une fonction de deux variables

**Exercice 2** –  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$

On note  $\rho(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$ .

### Corrigé – Exercice 2.

#### 1. Dérivées partielles.

$f$  est produit d'une fonction polynomiale et de la composée de l'exponentielle par une fonction polynomiale : elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$\partial_1 f(x, y) = 2x(1 - x^2 - y)\rho(x, y), \quad \partial_2 f(x, y) = (1 - 2y(x^2 + y))\rho(x, y).$$

#### 2. Points critiques.

$\partial_1 f = 0 \iff x = 0$  ou  $x^2 + y = 1$ . Si  $x = 0$  :  $\partial_2 f = 0 \iff 1 - 2y^2 = 0 \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
Si  $x^2 + y = 1$  :  $\partial_2 f = 0 \iff 1 - 2y = 0$ , d'où  $y = \frac{1}{2}$  et  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

#### 3. Le point $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Ici  $x = 0$ ,  $x^2 + y = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\rho = e^{-1/2}$ . Alors  $\partial_{1,2}^2 f = 0$ ,  $\partial_{1,1}^2 f = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})e^{-1/2} > 0$  et, comme  $1 - 2y^2 = 0$ ,  $\partial_{2,2}^2 f = -2 \cdot 2y e^{-1/2} = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$ .

$$\nabla^2 f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont de signes opposés :

$$f \text{ n'admet pas d'extremum local en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ (point col).}$$

#### 4. Le point $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Ici  $x^2 + y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $1 - 2y(x^2 + y) = 1 - 2y^2 = 0$ , donc  $\partial_{1,2}^2 f = 0$ ,  $\partial_{1,1}^2 f = 2(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})e^{-1/2} > 0$  et  $\partial_{2,2}^2 f = -2 \cdot 2y e^{-1/2} = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$ . La hessienne est diagonale à valeurs propres strictement positives :

$$f \text{ admet en } \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ un minimum local, de valeur } -\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

#### 5. Le point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ .

Ici  $x^2 = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ ,  $x^2 + y = 1$ ,  $\rho = e^{-3/4}$ . Alors  $\partial_{1,1}^2 f = 2(0 - 1)e^{-3/4} = -2e^{-3/4}$ ,  $\partial_{2,2}^2 f = -2(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(1 - 1))e^{-3/4} = -3e^{-3/4}$  et  $\partial_{1,2}^2 f = -\frac{2}{\sqrt{2}}(1 + 0)e^{-3/4} = -\sqrt{2}e^{-3/4}$  :

$$H = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

$H$  est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral). Notons  $B = e^{3/4}H$ . Si  $BX = \lambda X$  avec  $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$  :  $(-2 - \lambda)u = \sqrt{2}v$  et  $\sqrt{2}u = -(3 + \lambda)v$ . Si  $u = 0$  alors  $v = 0$  ; donc  $u \neq 0$  et, en multipliant la seconde équation par  $\sqrt{2}$  et en utilisant la première,  $2u = (3 + \lambda)(2 + \lambda)u$ , soit  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ ,  $\lambda \in \{-1, -4\}$ . Réciproquement  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\mathrm{Sp}(H) = \{-e^{-3/4}, -4e^{-3/4}\} \subset \mathbb{R}^*,$$

$$f \text{ admet en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \text{ un maximum local, égal à } e^{-3/4}.$$

Comme  $f(-x, y) = f(x, y)$ , il en est de même en  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ .

## 6. Extrema globaux.

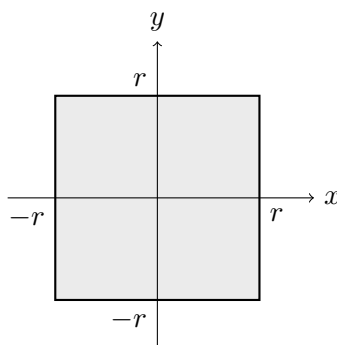
- a) Posons  $m = \max(|x|, |y|)$ . On a  $|x^2 + y| \leq x^2 + |y| \leq m^2 + m$ , et  $x^2 + y^2 \geq m^2$  (l'un des deux carrés vaut  $m^2$ ), donc  $\rho(x, y) \leq e^{-m^2}$  :

$$0 \leq |f(x, y)| \leq (m^2 + m)e^{-m^2}, \quad m = \max(|x|, |y|).$$

- b) Par croissances comparées,  $(u^2 + u)e^{-u^2} \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow +\infty$ . Par définition de la limite (avec la tolérance  $\frac{1}{2}e^{-3/4} > 0$ ), il existe  $r > 0$  tel que  $u \geq r \Rightarrow (u^2 + u)e^{-u^2} \leq \frac{1}{2}e^{-3/4}$ . Avec a) :

$$\max(|x|, |y|) \geq r \implies 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}e^{-3/4}.$$

- c)  $\mathcal{K}$  est le carré plein  $[-r, r]^2$  :



$\mathcal{K} = \{(x, y) : |x| \leq r\} \cap \{(x, y) : |y| \leq r\}$  est l'intersection des images réciproques du fermé  $[0, r]$  par les fonctions continues  $(x, y) \mapsto |x|$  et  $(x, y) \mapsto |y|$  :

$$\mathcal{K} = [-r, r]^2 \text{ est un fermé (borné) de } \mathbb{R}^2.$$

- d) Aux quatre points critiques,  $|f|$  vaut  $e^{-3/4} \simeq 0,47$  ou  $\frac{1}{\sqrt{2e}} \simeq 0,43$ , strictement plus que  $\frac{1}{2}e^{-3/4} \simeq 0,24$  : par b), ils vérifient  $\max(|x|, |y|) < r$ , donc sont dans  $\mathcal{K}$  (et même à l'intérieur).

$f$  est continue sur le fermé borné  $\mathcal{K}$  : par le théorème des bornes atteintes, elle y admet un maximum et un minimum. Sur le bord de  $\mathcal{K}$ ,  $|f| \leq \frac{1}{2}e^{-3/4}$ , alors que  $f$  prend les valeurs  $e^{-3/4}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$  dans  $\mathcal{K}$  : le maximum et le minimum sur  $\mathcal{K}$  sont atteints à l'intérieur  $] -r, r[$ , ouvert sur lequel ce sont des extrema locaux, donc en des points critiques. Le maximum vaut donc  $e^{-3/4}$  et le minimum  $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ . Hors de  $\mathcal{K}$ ,  $|f| \leq \frac{1}{2}e^{-3/4}$  : ce sont les extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$\max_{\mathbb{R}^2} f = e^{-3/4} \text{ atteint en } \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \quad \min_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \text{ atteint en } \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

### 7. Lecture de la figure 1 au point $(1, 0)$ .

$\nabla f(1, 0) = (2(1-1-0)e^{-1}, (1-0)e^{-1}) = (0, e^{-1})$  : la flèche est verticale, donc tangente au cercle en  $(1, 0)$ . En se déplaçant sur le cercle dans le sens de la flèche,  $f$  augmente ; dans l'autre sens, elle diminue.

$f$  ne semble pas admettre d'extremum sous la contrainte en  $(1, 0)$ .

### 8. La fonction $g$ .

$g'(y) = 1 - 2y$  :  $g$  est strictement croissante sur  $[-1, \frac{1}{2}]$ , strictement décroissante sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ , avec  $g(-1) = -1$ ,  $g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ ,  $g(1) = 1$ .

$$\max_{[-1, 1]} g = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, \quad \min_{[-1, 1]} g = g(-1) = -1,$$

et  $g(1) = 1$  est un minimum local de  $g$  sur  $[-1, 1]$ .

### 9. Extrema sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ .

Sur  $\mathcal{C}$ ,  $x^2 = 1 - y^2$  et  $y \in [-1, 1]$ , donc  $f(x, y) = (1 - y^2 + y)e^{-1} = \frac{g(y)}{e}$ . Au voisinage d'un point de  $\mathcal{C}$  avec  $x \neq 0$ , le cercle est décrit par  $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ ,  $y$  parcourant un voisinage de son ordonnée :  $f$  y admet un extremum sous contrainte si et seulement si  $g$  en admet un en  $y$ . Aux points  $(0, \pm 1)$ ,  $y = \pm 1$  est une borne de  $[-1, 1]$ .

$$\begin{array}{ll} \text{maximum global } \frac{5}{4e} \text{ en } \left( \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), & \text{minimum global } -\frac{1}{e} \text{ en } (0, -1), \\ \text{minimum local } \frac{1}{e} \text{ en } (0, 1). \end{array}$$

*Commentaire.* En ces quatre points, le gradient est orthogonal au cercle (porté par le rayon) : par exemple  $\nabla f(0, \pm 1) = (0, -e^{-1})$  et  $\nabla f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4e}(\sqrt{3}, 1)$ . Ailleurs (comme en  $(1, 0)$ ), la flèche a une composante tangente au cercle et il n'y a pas d'extremum sous contrainte.

## Problème – Comparaison de deux estimateurs

### Problème – Estimation de $a$ pour la loi $\mathcal{U}([0, a])$

$$V_n = \max(X_1, \dots, X_n), M_n = 2\bar{X}_n, R_q(T) = \mathbb{E}[(T - a)^2].$$

#### Corrigé – Problème.

#### Partie 1 – Estimateur du maximum de vraisemblance

##### 1. Simulation de $V_n$ .

- a) Si  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ , alors  $aU \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a])$  ; on simule  $n$  telles variables et on renvoie leur maximum.

def `simV(n, a)`:

`X = a*rd.random(n)`

`return np.max(X)`

- b) Les cinq trajectoires sont croissantes, restent sous  $a = 1$  et s'en approchent très vite.

On conjecture que  $V_n$  converge vers  $a$  par valeurs inférieures ( $V_n$  biaisé).

##### 2. Loi de $V_n$ .

- a)

$$F_{X_1}(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad \frac{x}{a} \text{ si } 0 \leq x \leq a, \quad 1 \text{ si } x > a.$$

- b)  $[V_n \leq x] = \bigcap_i [X_i \leq x]$  et les  $X_i$  sont indépendantes :  $F_n = F_{X_1}^n$ .

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq a, \quad 1 \text{ si } x > a.$$

- c)  $F_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sauf en 0 et  $a$  :  $V_n$  est à densité et, en dérivant,

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{a^n} \text{ si } 0 < x < a, \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

##### 3. Espérance de $V_n$ .

$f_n$  est nulle hors du segment  $[0, a]$ , donc  $V_n$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(V_n) = \int_0^a x \frac{nx^{n-1}}{a^n} dx = \frac{n}{n+1}a$ .

$$\mathbb{E}(V_n) = \frac{n}{n+1}a \neq a : V_n \text{ est biaisé (biais } -\frac{a}{n+1}, \text{ asymptotiquement sans biais).}$$

##### 4. Convergence de $V_n$ .

$V_n \in [0, a]$ , donc  $[|V_n - a| \geq \varepsilon] = [V_n \leq a - \varepsilon]$  et  $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \varepsilon) = F_n(a - \varepsilon)$ . Si  $\varepsilon \geq a$ , c'est 0 ; si  $\varepsilon < a$ , c'est  $(1 - \frac{\varepsilon}{a})^n \rightarrow 0$ .

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \varepsilon) = F_n(a - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : V_n \text{ est convergent.}$$

**5. Loi limite de  $n(a - V_n)$ .**

$V_n$  étant à densité,  $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) = \mathbb{P}(V_n \geq a - \frac{t}{n}) = 1 - F_n(a - \frac{t}{n})$ . Si  $t < 0$ ,  $a - \frac{t}{n} > a$  et cette probabilité est nulle. Si  $t \geq 0$ , pour  $n > \frac{t}{a}$ , elle vaut  $1 - (1 - \frac{t}{na})^n$ . Or  $n \ln(1 - \frac{t}{na}) \sim -\frac{t}{a}$  (car  $\ln(1+u) \sim u$  en 0), donc  $(1 - \frac{t}{na})^n \rightarrow e^{-t/a}$ .

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) = 1 - F_n\left(a - \frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t/a} & t \geq 0 \end{cases} : n(a - V_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{a}\right).$$

**6. Intervalle de confiance avec  $V_n$ .**

Le même calcul montre que  $Y_n = n(1 - \frac{V_n}{a})$  vérifie  $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = 1 - (1 - \frac{t}{n})^n \rightarrow 1 - e^{-t}$  pour  $t \geq 0$  (loi limite  $\mathcal{E}(1)$ , indépendante de  $a$ ), et  $\mathbb{P}(Y_n < 0) = 0$ . Avec  $t_\alpha = -\ln \alpha > 0$  (de sorte que  $1 - e^{-t_\alpha} = 1 - \alpha$ ),  $1 - \alpha_n := \mathbb{P}(0 \leq Y_n \leq t_\alpha) \rightarrow 1 - \alpha$ . Pour  $n > t_\alpha$ ,

$$0 \leq Y_n \leq t_\alpha \iff V_n \leq a \leq \frac{V_n}{1 - \frac{t_\alpha}{n}} = \frac{nV_n}{n + \ln \alpha}.$$

$$\left[ V_n ; \frac{nV_n}{n + \ln \alpha} \right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{ au niveau } 1 - \alpha.$$

**7. Risque quadratique de  $V_n$ .**

a)  $\mathbb{E}(V_n^2) = \int_0^a x^2 \frac{nx^{n-1}}{a^n} dx$  (intégrale sur un segment) :

$$\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{n}{n+2} a^2.$$

b)  $R_q(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - 2a\mathbb{E}(V_n) + a^2 = a^2 \left( \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right) = a^2 \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$   
:

$$R_q(V_n) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Par l'inégalité de Markov appliquée à  $(V_n - a)^2$ ,  $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{R_q(V_n)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$  : on retrouve que  $V_n$  est convergent (question 4).

**Partie 2 – Méthode des moments****8. Simulation de  $M_n$ .**

On simule l'échantillon comme en 1.a, puis on double sa moyenne.

```
def simM(n, a):
    X = a*rd.random(n)
    return 2*np.mean(X)
```

**9. Moments de  $\bar{X}_n$ .**

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{a}{2}$  et  $\mathbb{V}(X_i) = \frac{a^2}{12}$ . Par linéarité, et indépendance pour la variance :

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{a}{2}, \quad \mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{a^2}{12n}, \quad \mathbb{E}(M_n) = a : M_n \text{ est sans biais.}$$

### 10. Risque quadratique de $M_n$ .

$M_n$  étant sans biais,  $R_q(M_n) = \mathbb{V}(M_n) = 4\mathbb{V}(\bar{X}_n)$ . Comme  $R_q(M_n) \rightarrow 0$ , l'inégalité de Markov (comme en 7.b) donne la convergence.

$$R_q(M_n) = \frac{a^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : M_n \text{ est convergent.}$$

### 11. Loi limite de $\sqrt{n}(M_n - a)$ .

Par le théorème central limite,  $T_n = \frac{\bar{X}_n - \frac{a}{2}}{a/\sqrt{12n}} = \frac{\sqrt{3}}{a} \sqrt{n}(M_n - a)$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour  $c = \frac{a}{\sqrt{3}} > 0$ ,  $\mathbb{P}(cT_n \leq x) = \mathbb{P}(T_n \leq \frac{x}{c}) \rightarrow \Phi(\frac{x}{c})$ , fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, c^2)$  (transformation affine d'une variable normale).

$$\sqrt{n}(M_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{a^2}{3}\right).$$

### 12. Intervalle de confiance avec $M_n$ .

Soit  $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ . Par définition de la convergence en loi,  $\mathbb{P}(-u_\alpha < T_n \leq u_\alpha) \rightarrow 2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$ . Pour  $n > \frac{u_\alpha^2}{3}$ ,

$$|T_n| \leq u_\alpha \iff a\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) \leq M_n \leq a\left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) \iff \frac{M_n}{1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}} \leq a \leq \frac{M_n}{1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}}.$$

$$\left[ \frac{M_n}{1 + u_\alpha/\sqrt{3n}} ; \frac{M_n}{1 - u_\alpha/\sqrt{3n}} \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de  $a$  au niveau  $1 - \alpha$ . Sa longueur est de l'ordre de  $\frac{2u_\alpha a}{\sqrt{3n}}$ , alors que celle de l'intervalle de la question 6,  $V_n(\frac{n}{n+\ln \alpha} - 1) = \frac{-V_n \ln \alpha}{n+\ln \alpha}$ , est de l'ordre de  $\frac{-a \ln \alpha}{n}$  :

$$\text{l'intervalle construit sur } V_n \text{ est meilleur (plus étroit, en } \frac{1}{n} \text{ au lieu de } \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

### 13. Comparaison des risques quadratiques.

$$\frac{R_q(V_n)}{R_q(M_n)} = \frac{6n}{(n+1)(n+2)} \text{ et } (n+1)(n+2) - 6n = (n-1)(n-2) \geq 0.$$

$$R_q(V_n) \leq R_q(M_n) \text{ (égalité ssi } n \in \{1, 2\}), \quad R_q(V_n) \sim \frac{2a^2}{n^2}, \quad R_q(M_n) = \frac{a^2}{3n}.$$

Sur la figure 3, les trajectoires de  $(V_n)$  se collent très vite (sous) la valeur  $a = 1$ , tandis que celles de  $(M_n)$  oscillent autour de 1 avec des écarts encore de l'ordre de 0,1 pour  $n = 100$  :  $V_n$ , bien que biaisé, est beaucoup plus précis que  $M_n$ .

## Partie 3 – Consistance de ces estimateurs

### 14. L'estimateur $V_n$ avec une mesure erronée.

a) Pour  $t \in ]a, 2a]$  et  $i \geq 2$ ,  $\mathbb{P}(X_i \leq t) = 1$  ; par indépendance,

$$\mathbb{P}(V_n \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) = \frac{t}{2a}, \quad \mathbb{P}(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}.$$

b) De même, pour  $t \in [0, a]$ ,  $\mathbb{P}(V_n \leq t) = \frac{t}{2a} \left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} = \frac{t^n}{2a^n}$ . Ainsi

$$F_{V_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^n}{2a^n} & 0 \leq t \leq a \\ \frac{t}{2a} & a < t \leq 2a \\ 1 & t > 2a. \end{cases}$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $F_{V_n}(t) \rightarrow G(t)$  avec  $G(t) = 0$  si  $t < a$ ,  $G(t) = \frac{t}{2a}$  si  $a \leq t \leq 2a$ ,  $G(t) = 1$  si  $t > 2a$  (en  $t = a$ ,  $F_{V_n}(a) = \frac{1}{2} = G(a)$ ).  $G$  est la fonction de répartition de la variable  $\max(a, X_1)$  : pour  $t \geq a$ ,  $\mathbb{P}(\max(a, X_1) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = \frac{t}{2a}$  (ou 1), et 0 pour  $t < a$ .

$(V_n)$  converge en loi vers  $\max(a, X_1)$ , qui n'est pas la constante  $a$ .

c)  $\frac{3}{2}a \in ]a, 2a]$ , donc  $\mathbb{P}(V_n > \frac{3a}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ . Ainsi  $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \frac{a}{2}) \geq \frac{1}{4}$  pour tout  $n$  :

$$\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3a}{2}\right) = \frac{1}{4} : V_n \text{ n'est plus un estimateur convergent de } a.$$

### 15. L'estimateur $M_n$ avec une mesure erronée.

a)  $X_2 + \dots + X_n = \frac{n-1}{2}M'_n$ , donc

$$M_n = \frac{2X_1}{n} + \frac{n-1}{n}M'_n.$$

b)  $M_n - a = \left(\frac{2X_1}{n} - \frac{a}{n}\right) + \frac{n-1}{n}(M'_n - a)$ . Comme  $X_1 \in [0, 2a]$ ,  $\frac{2X_1 - a}{n} \in \left[-\frac{a}{n}, \frac{3a}{n}\right]$ , et  $\frac{n-1}{n} \leq 1$  :

$$|M_n - a| \leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|.$$

c) Pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{3a}{n} \leq \frac{3a}{n_0} < \varepsilon$ . Si  $|M'_n - a| < \varepsilon$ , alors  $|M_n - a| < 2\varepsilon$  :

$$[|M'_n - a| < \varepsilon] \subset [|M_n - a| < 2\varepsilon].$$

d) En passant aux complémentaires,  $\mathbb{P}(|M_n - a| \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|M'_n - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} a.$$

### 16. Commentaire.

Dans le modèle exact,  $V_n$  est bien plus précis que  $M_n$  (risque en  $\frac{1}{n^2}$  contre  $\frac{1}{n}$ , intervalles plus étroits). Mais il n'est pas robuste : une seule mesure aberrante suffit à lui faire perdre sa convergence, puisqu'un maximum est entièrement déterminé par la plus grande valeur.  $M_n$ , moins précis, est robuste : l'influence d'une mesure erronée est diluée d'un facteur  $\frac{1}{n}$  et la convergence est conservée.

$V_n$  : précis mais sensible aux valeurs aberrantes ;  $M_n$  : moins précis mais robuste.