

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2021

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1 – Matrices et matrices magiques	2
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	2
2 Exercice 2 – Extrema d'une fonction de deux variables	3
<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; intégrales généralisées.</i>	3
3 Problème – Comparaison de deux estimateurs	4
<i>Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; Python.</i>	4

1 Exercice 1 – Matrices et matrices magiques

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

Partie 1 – Étude de trois matrices

On note A , J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $\text{Sp}(A) = \{0\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\text{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J .
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 – Étude des matrices magiques

Soit $n \geq 3$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* lorsque les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. En notant $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}, \quad c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}, \quad d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}, \quad d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1},$$

la matrice M est magique si et seulement si, pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$. Cette valeur commune est notée $s(M)$ et appelée somme de M .

On note E_n l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n , admis comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admettra dans la suite que, pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. On note K_n l'ensemble des matrices de E_n de somme nulle. Montrer que K_n est un sous-espace vectoriel de E_n .
7. Soit $M \in E_n$. Montrer que ${}^tM \in E_n$ et déterminer $s({}^tM)$.
8. Soit $M \in E_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in K_n$, où J_n désigne la matrice dont tous les coefficients valent 1.
9. Soit $M \in E_n$. Montrer que $W_n = (1, \dots, 1)^T$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3 – Cas $n = 3$

On se place dans le cas particulier $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A , J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = M_1 + M_2$, avec M_1 antisymétrique et M_2 symétrique. Expliciter M_1 et M_2 en fonction de M .

12. Soit $M \in K_3$, et écrivons $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition précédente.
- Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à K_3 .
 - Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $M_1 = \alpha A$ et $M_2 = \beta S$.
13. En déduire une base de K_3 , puis montrer que (A, J, S) est une base de E_3 .
14. On note $\Delta = \{M \in E_3 \mid P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1. Montrer que $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.

2 Exercice 2 – Extrema d'une fonction de deux variables

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; intégrales généralisées.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}.$$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

On admettra dans la suite que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_{1,1}^2 f = 2((1 - (x^2 + y))(1 - 2x^2) - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\partial_{2,2}^2 f = -2(x^2 + 2y + y(1 - 2y(x^2 + y)))e^{-(x^2+y^2)}, \quad \partial_{1,2}^2 f = -2x(1 + 2y(1 - x^2 - y))e^{-(x^2+y^2)}.$$

- Montrer que la hessienne de f en $(0, 1/\sqrt{2})$ est diagonale. La fonction f admet-elle un extremum local en ce point ? Si oui, de quelle nature ?
- Montrer que f admet un extremum local en $(0, -1/\sqrt{2})$ et préciser sa nature.
- Montrer que la hessienne de f en $(1/\sqrt{2}, -1/2)$ est $H = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$. Justifier que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement négatives. Qu'en déduire pour ce point ?
- Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leq |f(x, y)| \leq ((\max(|x|, |y|))^2 + \max(|x|, |y|))e^{-(\max(|x|, |y|))^2}.$$

- En étudiant la limite en $+\infty$ de $u \mapsto (u^2 + u)e^{-u^2}$, montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(|x|, |y|) \geq r \implies 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}e^{-3/4}.$$

- Représenter l'ensemble $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leq r\}$ et justifier que c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- Vérifier que tous les points critiques de f appartiennent à $\mathcal{K}$. En déduire tous les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$, et les points où ils sont atteints.

On cherche maintenant à étudier les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. La figure suivante représente le champ de vecteurs du gradient de f , ainsi que le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

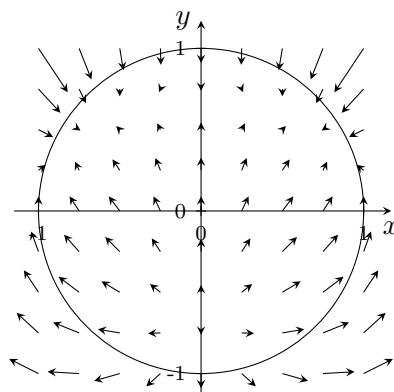


Figure 1 – Gradients de f et cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

7. En s'appuyant sur la figure 1, la fonction f semble-t-elle admettre un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ au point $(1, 0)$? Justifier.
8. Déterminer sur $[-1, 1]$ les extrema de la fonction $g : y \mapsto 1 + y - y^2$.
9. Dédurre de la question précédente l'ensemble des points pour lesquels f admet un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Commenter au vu de la figure 1.

3 Problème – Comparaison de deux estimateurs

Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; estimations ; Python.

Soit a un réel strictement positif. Dans tout le problème, $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, a]$. L'objectif est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de a . Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Pour un estimateur T du paramètre a , son *risque quadratique* est défini par $R_q(T) = \mathbb{E}[(T - a)^2]$, lorsque cette espérance existe.

Partie 1 – Estimateur du maximum de vraisemblance

Pour tout $n \geq 1$, on note $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, appelé estimateur de a du maximum de vraisemblance.

1. a) Écrire une fonction Python `simV(n, a)` prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel $a > 0$, et qui renvoie une réalisation de V_n .

```
import numpy as np

def simV(n, a):
    return np.max(np.random.uniform(0, a, n))
```

- b) La figure 2 représente cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ dans le cas $a = 1$. Que peut-on conjecturer sur l'estimateur V_n ?

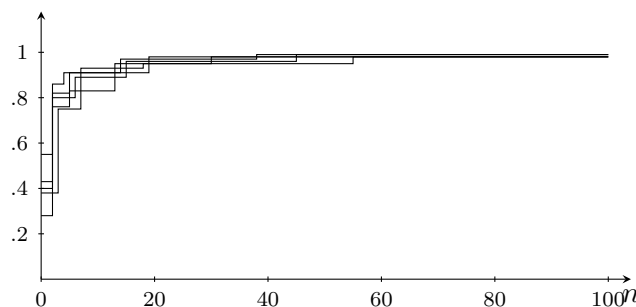


Figure 2 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ pour $a = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X_1 , suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$.
 - b) Déterminer la fonction de répartition F_n de V_n .
 - c) En déduire que V_n est une variable à densité et donner une densité de V_n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que V_n admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(V_n)$. L'estimateur V_n est-il sans biais ?
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \varepsilon)$ en fonction de F_n , de a et de ε . L'estimateur V_n est-il convergent ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t , exprimer $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t)$ à l'aide de F_n . En déduire que $(n(a - V_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et ses paramètres.
6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer, à partir de la question précédente, un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre a , construit à l'aide de V_n .
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Montrer que V_n admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.
 - b) Montrer que le risque quadratique de V_n vaut $\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$. Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

Partie 2 – Méthode des moments

Pour $n \geq 1$, on note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est-à-dire $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. On note $M_n = 2\bar{X}_n$, appelé estimateur de a par la méthode des moments.

8. Écrire une fonction Python `simM(n, a)` qui, prenant en entrée un entier naturel non nul n et le réel $a > 0$, renvoie une réalisation de M_n .

```
import numpy as np

def simM(n, a):
    return 2 * np.mean(np.random.uniform(0, a, n))
```

9. Déterminer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais.
10. Déterminer le risque quadratique de M_n . Cet estimateur est-il convergent ?
11. Justifier que la suite $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et les paramètres.

12. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Dédurre de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre a , construit sur M_n . Quel intervalle semble meilleur entre celui-ci et celui de la question 6 ?
13. Comparer le risque quadratique de M_n à celui de V_n obtenu à la question 7.b). Commenter à l'aide de la figure 3 ci-dessous.

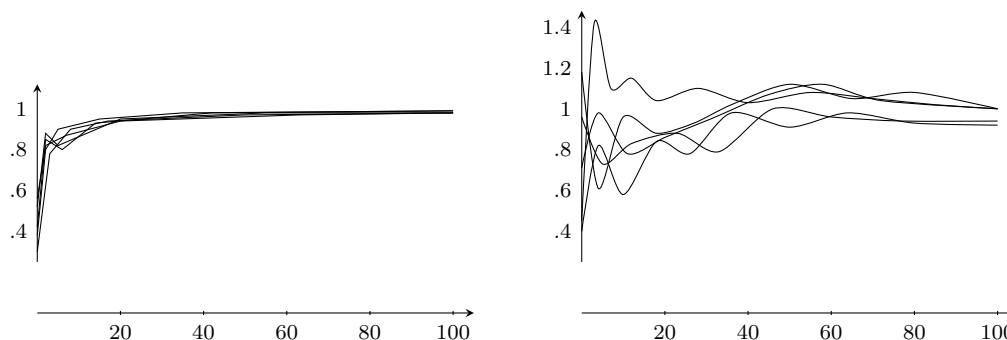


Figure 3 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2, \dots, M_{100})$ pour $a = 1$.

Partie 3 – Consistance de ces estimateurs

Les parties précédentes ont montré que (V_n) convergeait « plus vite » vers a que (M_n) . On étudie maintenant la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure X_1 est erronée. Les variables X_i restent mutuellement indépendantes, mais X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$ et, pour $i \geq 2$, X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$. Pour tout $n \geq 1$, $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $M_n = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

14. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in]a, 2a]$, montrer que $\mathbb{P}(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}$.
- b) Déterminer la fonction de répartition de V_n . La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle en loi ?
- c) Calculer $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3a}{2}\right)$. L'estimateur V_n est-il toujours convergent ?
15. On pose, pour $n \geq 2$, $M'_n = \frac{2}{n-1}(X_2 + \dots + X_n)$. On rappelle que $(M'_n)_{n \geq 2}$ converge en probabilité vers a .
- a) Pour $n \geq 2$, exprimer M_n en fonction de X_1 , M'_n et n .
- b) En déduire que, pour $n \geq 2$, $|M_n - a| \leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|$.
- c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 \geq 2$ tel que $3a/n_0 < \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq n_0$, comparer les événements $[|M'_n - a| < \varepsilon]$ et $[|M_n - a| < 2\varepsilon]$.
- d) La suite $(M_n)_{n \geq 2}$ converge-t-elle en probabilité vers a ?
16. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.