EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2021

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé. On note E et V l'espérance et la variance, et Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 1 – Moyennes de Cesàro et suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$

Exercice 1 – Suites

(a_n) est croissante de limite ℓ, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$; $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Question préliminaire.

a) Pour $0 \leq k \leq n-1$, $a_k \leq a_n$ par croissance ; en sommant, $nb_n \leq na_n$. Puis $b_{n+1} - b_n = \frac{nb_n + a_n}{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{n+1} \geq 0$.

$$\boxed{b_n \leq a_n, \qquad (b_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}$$

b) La suite (a_n) étant croissante de limite ℓ, $a_n \leq \ell$; donc $b_n \leq a_n \leq \ell$. Croissante et majorée, (b_n) converge (théorème de la limite monotone) vers ℓ', et par passage à la limite dans $b_n \leq \ell$:

$$\boxed{b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \leq \ell.}$$

c) $2nb_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq nb_n + na_n$, car $a_k \geq a_n$ pour $k \geq n$:

$$\boxed{b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}.}$$

d) (b_{2n}) est extraite de (b_n), donc tend vers ℓ'. Par passage à la limite, $\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}$, soit $\ell' \geq \ell$, et avec b) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.}$$

2. La suite (u_n).

a) Par récurrence : $u_0 = 1 \geq 1$; si $u_n \geq 1$, alors $u_n^2 + u_n \geq 0$, u_{n+1} est défini et $u_{n+1} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 1.}$$

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n > 0$ et les termes sont positifs, donc $u_{n+1} > u_n$: (u_n) est strictement croissante. Si elle convergeait vers L, on aurait $L \geq 1$ et, par continuité,

$L = \sqrt{L^2 + L}$, soit $L = 0$: absurde. Croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$ (théorème de la limite monotone).

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

c) Au début d'un passage dans la boucle, `S` contient S_n et `u` contient u_{n-1} ; on calcule u_n, puis $S_{n+1} = S_n + u_n$.

```
import numpy as np
n = 1
u = 1
S = 1
while S <= 1000:
    u = np.sqrt(u**2 + u)
    S = S + u
    n = n + 1
print(n)
```

3. Un équivalent de u_n.

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{u_n}{u_n + \sqrt{u_n^2 + u_n}} = \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/u_n}}$, et $\frac{1}{u_n} \to 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}.}$$

b) Pour $x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/x}}$. Quand x croît, $\sqrt{1 + 1/x}$ décroît, donc f est croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ et (u_n) est croissante à valeurs dans $[1, +\infty[$, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$.

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [1, +\infty[\text{ et } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

c) On applique la question 1 à $a_k = u_{k+1} - u_k$, croissante de limite $\frac{1}{2}$: $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{u_n - 1}{n} \to \frac{1}{2}$. Donc $\frac{u_n}{n} = \frac{u_n - 1}{n} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$:

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.}$$

4. La somme S_n.

a) $u_k = u_{k+1}^2 - u_k^2$, donc par télescopage $S_n = u_n^2 - u_0^2$. Comme $u_n^2 \to +\infty$ et $u_n^2 \sim \frac{n^2}{4}$:

$$\boxed{S_n = u_n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}.}$$

b) $S_n > 1000 \iff u_n^2 > 1001 \iff u_n > \sqrt{1001}$. On cherche donc le plus petit n tel que $u_n > \sqrt{1001}$ (ici `u` contient u_n).

```
import numpy as np
n = 0
u = 1
while u <= np.sqrt(1001):
    u = np.sqrt(u**2 + u)
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 2 – Variables de Rademacher

Exercice 2 – Produits et sommes de variables de Rademacher

$Y = e^Z$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$; $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1 - p$; $T_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Loi de $Y = e^Z$.

a) $Y > 0$, donc $F_Y(x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x > 0$, ln étant strictement croissante, $F_Y(x) = P(Z \leq \ln x)$:

$$\boxed{F_Y(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \qquad F_Y(x) = \Phi(\ln x) \text{ si } x > 0.}$$

b) F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0 : $\Phi(\ln x) \to 0$ quand $x \to 0^+$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. En dérivant sur $]0, +\infty[$: $F_Y'(x) = \frac{1}{x}\Phi'(\ln x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x)^2/2}$.

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(\ln x)^2}{2}\Big) \text{ si } x > 0, \qquad f_Y(x) = 0 \text{ sinon.}}$$

2. Loi de T_n.

a) $E(X_n) = p - (1-p)$ et $E(X_n^2) = 1$:

$$\boxed{E(X_n) = 2p - 1, \qquad V(X_n) = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).}$$

b) T_n est un produit de termes valant ± 1 : $T_n(\Omega) \subset \{-1, 1\}$ (et les deux valeurs sont prises, voir c). Par indépendance, $E(T_n) = \prod_k E(X_k) = (2p-1)^n$:

$$\boxed{T_n(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = E(T_n) = (2p-1)^n.}$$

c) $P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1$. En résolvant :

$$\boxed{P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}, \qquad P(T_n = -1) = \frac{1 - (2p-1)^n}{2}.}$$

d) Comme $0 < p < 1$, $|2p - 1| < 1$ et $(2p-1)^n \to 0$. La fonction de répartition de T_n vaut 0 sur $]-\infty, -1[$, $P(T_n = -1)$ sur $[-1, 1[$ et 1 sur $[1, +\infty[$; elle converge en tout point vers celle de la variable T définie par $P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} T, \qquad P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}.}$$

3. Pas de convergence en probabilité.

a) Sur l'intersection, l'inégalité triangulaire donne $|T_{n+1} - T_n| \leq |T_{n+1} - T'| + |T' - T_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\Big(|T_{n+1} - T'| < \tfrac{1}{2}\Big) \cap \Big(|T_n - T'| < \tfrac{1}{2}\Big) \subset \big(|T_{n+1} - T_n| < 1\big).}$$

b) En passant aux complémentaires, $(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)\subset(|T_{n+1}-T'|\geq\frac{1}{2})\cup(|T_n-T'|\geq\frac{1}{2})$, d'où

$$\boxed{P(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)\leq P\Big(|T_{n+1}-T'|\geq\frac{1}{2}\Big)+P\Big(|T_n-T'|\geq\frac{1}{2}\Big).}$$

c) $T_{n+1}-T_n=T_n(X_{n+1}-1)$ vaut 0 si $X_{n+1}=1$ et ± 2 si $X_{n+1}=-1$. Ainsi $(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)=(X_{n+1}=-1)$:

$$\boxed{P(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)=1-p.}$$

d) Si (T_n) convergeait en probabilité vers une variable T', le membre de droite de b) tendrait vers 0, alors que le membre de gauche vaut $1-p>0$ pour tout n.

$$\boxed{(T_n)\text{ ne converge pas en probabilité.}}$$

4. Le cas $p=\frac{1}{2}$.

a) Ici $E(X_k)=0$ et $V(X_k)=1$: $E(\overline{X}_n)=0$ et $V(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}$ (indépendance). Donc

$$\boxed{\overline{X}_n^*=\frac{\overline{X}_n-0}{1/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,\overline{X}_n.}$$

b) $U_n>0$ et $U_n^{1/\sqrt{n}}=e^{n\overline{X}_n/\sqrt{n}}=e^{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}=e^{\overline{X}_n^*}$. Les X_k sont indépendantes, de même loi, de variance $1>0$: par le théorème central limite, $\overline{X}_n^*\xrightarrow{\mathcal{L}}Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$. Par composition par la fonction continue exp,

$$\boxed{U_n^{1/\sqrt{n}}=e^{\overline{X}_n^*}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}e^Z=Y.}$$

Exercice 3 – Endomorphismes antisymétriques

Exercice 3 – Réduction d'un endomorphisme antisymétrique

$f \neq 0$ vérifie $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$; $s = f \circ f$, $g = f_{|\mathrm{Im}(f)}$, $t = g \circ g$.

Corrigé – Exercice 3.

1. **Orthogonalité de x et $f(x)$.**

   Avec $y = x$: $\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle = -\langle f(x), x\rangle$, donc

   $$\boxed{\forall x \in E, \quad \langle f(x), x\rangle = 0.}$$

2. **Supplémentarité.**

   Si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, écrivons $x = f(y)$: $\|x\|^2 = \langle f(y), x\rangle = -\langle y, f(x)\rangle = 0$, donc $x = 0_E$. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$.

   $$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.}$$

   De plus, pour $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $\langle f(y), x\rangle = -\langle y, f(x)\rangle = 0$: $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux, donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

3. **L'endomorphisme $s = f \circ f$.**

   s est linéaire et $\langle s(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, s(y)\rangle$: s est symétrique. Si $s(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, $\lambda\|x\|^2 = \langle s(x), x\rangle = -\|f(x)\|^2 \leq 0$.

   $$\boxed{s \text{ est symétrique et } \mathrm{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-.}$$

4. **L'endomorphisme induit g.**

   a) $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f ($f(f(y)) \in \mathrm{Im}(f)$), donc g est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$, espace euclidien pour le produit scalaire induit, et la relation d'antisymétrie reste vraie pour $x, y \in \mathrm{Im}(f)$.

   $$\boxed{g \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } \mathrm{Im}(f).}$$

   b) Comme en 3, $t = g \circ g$ est symétrique ; $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$ car $f \neq 0$, donc t admet des valeurs propres (théorème spectral), toutes négatives ou nulles. Si $t(x) = 0$ avec $x \in \mathrm{Im}(f)$, alors $\|g(x)\|^2 = -\langle t(x), x\rangle = 0$, donc $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$: 0 n'est pas valeur propre.

   $$\boxed{\mathrm{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-^*.}$$

5. **Une famille $(e_1, g(e_1))$.**

   a) $t(g(e_1)) = g(t(e_1)) = \lambda g(e_1)$: $g(e_1) \in E_\lambda(t)$. Par 1 appliqué à g, $\langle g(e_1), e_1\rangle = 0$. Enfin $\|g(e_1)\|^2 = -\langle t(e_1), e_1\rangle = -\lambda\|e_1\|^2 > 0$. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

   $$\boxed{(e_1, g(e_1)) \text{ est une famille orthogonale et libre de } E_\lambda(t).}$$

b) Soit F_2 l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$. Pour $x \in F_2$: $g(x) \in E_\lambda(t)$ (comme en a)), $\langle g(x), e_1\rangle = -\langle x, g(e_1)\rangle = 0$ et $\langle g(x), g(e_1)\rangle = -\langle x, t(e_1)\rangle = -\lambda\langle x, e_1\rangle = 0$. Donc F_2 est stable par g.

Montrons par récurrence sur la dimension que tout sous-espace $G \neq \{0\}$ de $E_\lambda(t)$ stable par g admet une base orthogonale de la forme $(e_1, g(e_1), \ldots, e_q, g(e_q))$. On choisit $e_1 \in G$ non nul : par a), $(e_1, g(e_1))$ est orthogonale libre dans G ; l'orthogonal G' de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans G est stable par g (même calcul), de dimension $\dim G - 2$; s'il n'est pas nul, on lui applique l'hypothèse de récurrence, et l'on concatène. Appliqué à $G = E_\lambda(t)$:

$$\boxed{\dim E_\lambda(t) = 2p, \qquad (e_1, g(e_1), \ldots, e_p, g(e_p)) \text{ base orthogonale de } E_\lambda(t).}$$

6. Normalisation.

a)

$$\|g(e_k)\|^2 = \langle g(e_k), g(e_k)\rangle = -\langle e_k, t(e_k)\rangle = -\lambda\|e_k\|^2, \qquad \boxed{\|g(e_k)\|^2 = -\lambda\|e_k\|^2.}$$

b) Par a), $\|g(e_k)\| = \sqrt{-\lambda}\,\|e_k\|$. Donc $g(e'_k) = \frac{g(e_k)}{\|e_k\|} = \frac{\|g(e_k)\|}{\|e_k\|}e''_k = \sqrt{-\lambda}\,e''_k$, et $g(e''_k) = \frac{t(e_k)}{\|g(e_k)\|} = \frac{\lambda e_k}{\sqrt{-\lambda}\|e_k\|} = -\sqrt{-\lambda}\,e'_k$.

$$\boxed{g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}\,e''_k, \qquad g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}\,e'_k.}$$

7. Forme réduite.

a) t est symétrique : par le théorème spectral, $\mathrm{Im}(f)$ est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres, tous de dimension paire (5.b).

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) \text{ est pair.}}$$

b) Pour chaque valeur propre λ de t, la famille $(e'_1, e''_1, \ldots, e'_p, e''_p)$ est une base orthonormée de $E_\lambda(t)$; en les concaténant, on obtient une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$, formée de r couples (e', e'') vérifiant $f(e') = ae''$ et $f(e'') = -ae'$ avec $a = \sqrt{-\lambda} > 0$ (6.b). On la complète par une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$ (question 2), dont les vecteurs ont une image nulle. Dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ obtenue, chaque couple fournit le bloc $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs du noyau des colonnes nulles.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B} \text{ a la forme annoncée (seconde forme si } \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}).}$$

Problème – Statistique d'ordre médiane

Problème – Intégrales $I(p,q)$ et densités b_n

$I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$, $b_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n$ sur $[0,1]$. V_k est la k-ième valeur dans l'ordre croissant parmi $U_1,\dots,U_{2n+1}$.

Corrigé – Problème.

Partie 1 – Calcul d'intégrales

1. Cas particuliers.

$$\boxed{I(p,0) = \frac{1}{p+1}, \qquad I(0,q) = \Big[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{q+1}.}$$

2. Relation de récurrence.

On intègre par parties sur le segment $[0,1]$ avec $u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v(x) = (1-x)^q$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(x) = x^p$, $v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ $(q \geq 1)$:

$$I(p,q) = \Big[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1}\Big]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\boxed{I(p,q) = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1),}$$

le crochet étant nul en 0 et en 1.

3. La propriété H_q.

H_0 s'écrit $I(p,0) = \frac{p!}{p!}I(p,0)$: vraie. Si H_q est vraie, pour tout p, par 2 puis H_q appliquée à $p+1$,

$$I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q) = \frac{q+1}{p+1}\cdot\frac{(p+1)!\,q!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0)$$

$$= \frac{p!\,(q+1)!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0).$$

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N},\ H_q \text{ est vraie.}}$$

4. Valeur explicite.

Avec $I(p+q,0) = \frac{1}{p+q+1}$:

$$\boxed{I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}, \qquad I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Partie 2 – Étude d'une suite de variables aléatoires

5. Une densité.

b_n est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, et $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n,n) = 1$:

$$\boxed{b_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

6. La loi de X_0.

$b_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$:

$$\boxed{X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$$

7. Moments de X_n.

a) b_n est nulle hors de $[0,1]$, donc X_n admet des moments de tous ordres. Par 4,

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+1,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2}, \qquad \boxed{E(X_n) = \frac{1}{2}.}$$

b) $E(X_n^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2,n) = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$, donc $V(X_n) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)}$:

$$\boxed{V(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}.}$$

c) Par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2} \to 0$:

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \frac{1}{2}.}$$

Partie 3 – Simulation informatique de X_n

8. Loi uniforme.

$$\boxed{F_U(x) = 0 \text{ si } x < 0, \qquad F_U(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \qquad F_U(x) = 1 \text{ si } x > 1.}$$

9. La dernière arrivée.

a)

$$\boxed{V_{2n+1} = \max(U_1, \ldots, U_{2n+1}).}$$

b) $[V_{2n+1} \leq x] = \bigcap_i [U_i \leq x]$ et, par indépendance, $G_{2n+1} = F_U^{2n+1}$:

$$\boxed{G_{2n+1}(x) = 0 \text{ si } x < 0, \qquad x^{2n+1} \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \qquad 1 \text{ si } x > 1.}$$

10. La première arrivée.

a)

$$\boxed{V_1 = \min(U_1, \ldots, U_{2n+1}).}$$

b) $[V_1 > x] = \bigcap_i [U_i > x]$, donc $P(V_1 > x) = (1 - F_U(x))^{2n+1}$ et $G_1 = 1 - (1 - F_U)^{2n+1}$:

$$\boxed{P(V_1 > x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ (1-x)^{2n+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{G_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}}$$

11. Simulation de V_1 et V_{2n+1}.

On simule les $2n+1$ instants d'arrivée, puis on prend le minimum et le maximum.

```
n = int(input('n = '))
U = rd.random(2*n+1)
V1 = np.min(U)
V2 = np.max(U)
print(V1, V2)
```

12. La médiane V_{n+1}.

a) Soit $x \in [0,1]$ et $N_x = \sum_{i=1}^{2n+1} \mathbf{1}_{[U_i \leq x]}$ le nombre de personnes arrivées avant l'instant x. Les indicatrices sont indépendantes, de loi $\mathcal{B}(x)$, donc $N_x \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, x)$. La $(n+1)$-ième arrivée a lieu avant x si et seulement si au moins $n+1$ personnes sont arrivées avant x : $[V_{n+1} \leq x] = [N_x \geq n+1]$.

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.}$$

b) G_{n+1} vaut 0 sur $]-\infty, 0[$, 1 sur $]1, +\infty[$, et la formule de a) est continue sur $[0,1]$ avec $G_{n+1}(0) = 0$, $G_{n+1}(1) = 1$: G_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et 1. Posons $N = 2n+1$. Pour $1 \leq k \leq N-1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}\right) = N\Big(\binom{N-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{N-k} - \binom{N-1}{k} x^k (1-x)^{N-1-k}\Big)$ (car $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$ et $(N-k)\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k}$), et pour $k = N$ la dérivée de x^N est $N\binom{N-1}{N-1} x^{N-1}$. La somme est télescopique :

$$G'_{n+1}(x) = N \binom{N-1}{n} x^n (1-x)^{N-1-n}$$

$$= (2n+1)\binom{2n}{n} x^n (1-x)^n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n = b_n(x).$$

$$\boxed{g_{n+1} = b_n \text{ est une densité de } V_{n+1} : V_{n+1} \text{ a la même loi que } X_n.}$$

c) Les valeurs rangées dans l'ordre croissant sont $1, 2, 5, 8, 9, 13, 23$; la médiane de ces 7 valeurs est la 4-ième :

$$\boxed{\text{Le script affiche } \texttt{V = 8.0.}}$$

d) D'après b), X_n a la loi de V_{n+1}, médiane de $2n+1$ variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

```
def simX(n):
    U = rd.random(2*n+1)
    return np.median(U)
```